

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

# **TRATAMENTO DE IMPRECISÃO EM SISTEMAS ESPECIALISTAS**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

**ROBERTO C. S. PACHECO**

**FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 1991.**



0.204.677-4

UFSC-BU

# **TRATAMENTO DE IMPRECISÃO EM SISTEMAS ESPECIALISTAS**

**ROBERTO C. DOS SANTOS PACHECO**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

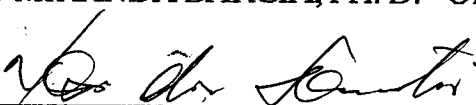
**RICARDO MIRANDA BARCIA, PH. D. - ORIENTADOR**

**NERI DOS SANTOS, DR. ING. - COORDENADOR DO CURSO**

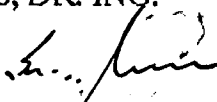
## **BANCA EXAMINADORA**



\_\_\_\_\_  
RICARDO MIRANDA BARCIA, PH. D. - ORIENTADOR



\_\_\_\_\_  
NERI DOS SANTOS, DR. ING.



\_\_\_\_\_  
SÉRGIO FERNANDO MAYERLE, M. SC.

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Ricardo Barcia pela orientação no trabalho e pelo engrandecedor convívio acadêmico e pessoal.

Aos professores e amigos Alvaro Lezana, Paulo Nascimento, Sérgio Mayerle, Neri dos Santos e Edgar Lanzer pelos ensinamentos.

Fazendo minhas as palavras do colega Vinícius Kern, agradeço à Zelita Chaves, secretária do PPGE, "pelo cuidado e carinho com que trata dos interesses de todos alunos" e pela constante disposição em fazê-lo.

Ao colega Alejandro Martins, por sua contribuição na formalização das características do problema da Administração do Capital de Giro Empresarial.

Aos colegas Fernando Montenegro, Paulo Luna e Mário Raymundi pela gratificante experiência proporcionada durante a confecção do sistema SECAGI, pelo auxílio neste trabalho e, especialmente, pela inestimável amizade construída durante todo o curso.

Aos grandes amigos Vinícius, Big e Zilah, por tudo que representam e pelos momentos vividos em Florianópolis. O período de créditos foi extremamente gratificante e muito em função dos trabalhos com o amigo Big.

Aos grandes e inesquecíveis amigos de Porto Alegre.

A minha família pelo incessante estímulo e apoio.

A Andrea pelo carinho e compreensão nos momentos em que o tempo dedicado aos trabalhos esteve entre nós.

## ABSTRACT

This dissertation presents the state-of-the-art in the Treatment of Imprecision in Expert Systems. Human Reasoning in Problems Solving and the main approaches for the Treatment of Imprecision in Artificial Intelligence (Bayesian Method, Certain Factors, Dempster and Shafer's Theory of Evidence and Fuzzy Sets Theory) are discussed.

Theoretical fundamentals for each framework, practical examples and computational performance aspects are discussed. A comparison among the existing frameworks for the Treatment of Imprecision in Expert Systems is presented.

## ÍNDICE GERAL

### CAPÍTULO I : INTRODUÇÃO

1.1. APRESENTAÇÃO	1
1.2. RELEVÂNCIA	1
1.2.1. Sistemas Especialistas	1
1.2.2. Sistemas Especialistas e Engenharia de Produção	2
1.2.3. O Tratamento de Imprecisão na Construção de Sistemas Especialistas	3
1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO	6
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	7

### CAPÍTULO II : O RACIOCÍNIO HUMANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E OS TIPOS E ORIGENS DE IMPRECISÃO EM S.E.

2.1. INTRODUÇÃO	10
2.2. O RACIOCÍNIO HUMANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	11
2.2.1. Raciocínio Dedutivo	13
2.2.1.a. O Formalismo do Raciocínio Dedutivo	13
2.2.1.a1. <i>Lógica Clássica</i>	13
2.2.1.a2. <i>Lógica Simbólica ou Booleana</i>	14
2.2.1.a3. <i>Lógica Proposicional</i>	14
I) Conectivos da Lógica Proposicional	15
i) Negação - NÃO (-)	15
ii) Conjunção - E (&)	15
iii) Disjunção - OU (v)	15
iv) Implicação - IMPLICA ( $\rightarrow$ )	15
v) Equivalência - EQUIVALE (=)	15
II) Equivalências e Propriedades da Lógica Proposicional	16
i) Comutativa	16
ii) Associativa	16
iii) Leis de DeMorgan	16
2.2.1.a4. <i>Cálculo Predicado</i>	17
I) Objetos	17
II) Predicado	17
III) Quantificadores	17
2.2.1.b. A Lógica e o Raciocínio Humano	18

---

2.2.1.c. A Lógica Difusa	20
2.2.1.c1. Da Modelagem à Representação	21
2.2.2. Raciocínio Indutivo	21
2.2.3. Raciocínio Analógico	24
2.3. TIPOS DE IMPRECISÃO	25
2.3.1. Incerteza ou Imprecisão ?	25
2.3.2. Incerteza	25
2.3.3. Difusão	26
2.3.4. Incerteza e Difusão	27
2.3.5. Ignorância	27
2.4. ORIGENS DE IMPRECISÃO EM SISTEMAS ESPECIALISTAS	27
2.4.1. Confiabilidade da Informação	28
2.4.2. A Linguagem de Representação das Regras	30
2.4.3. O Caráter Incompleto da Informação	31
2.4.4. Agregação de Informações de Múltiplas Origens	31
2.4.4.a. Regras Conflitantes	31
2.4.4.b. Regras Redundantes	31
2.4.4.c. Regras Sub-entendidas	31
2.4.4.d. Regras Perdidas	32
CAPÍTULO III : A ABORDAGEM BAYESIANA	
3.1. INTRODUÇÃO	33
3.2. FUNDAMENTOS DA ABORDAGEM BAYESIANA	33
3.3. A ABORDAGEM BAYESIANA EM SISTEMAS ESPECIALISTAS	35
3.3.1. A Formulação Geral do Teorema de Bayes	36
3.3.2. A Complexidade Computacional no Raciocínio Bayesiano	39
3.4. A ABORDAGEM BAYESIANA MODIFICADA	41
3.4.1. A Combinação de Evidências	44
3.4.2. Múltiplas Hipóteses e Múltiplas Evidências	46
3.4.3. Evidências Incertas - Abordagem de Pearl [PEA87]	49
3.4.4. Evidências Incertas-Bonissone [BON87] e Duda [DUD76]	52
3.4.5. Evidências Virtuais ou Intangíveis	53
3.4.6. Previsão de Eventos Futuros	55
3.4.7. Múltiplas Causas para Determinada Hipótese	57

3.4.8. Redes Bayesianas	59
3.4.8.a. A Propagação de Crença nas Redes Bayesianas	62
3.4.8.b. Utilização das Redes Bayesianas Como Modelos em Outros Tratamentos de Incerteza	64
3.5. CRÍTICAS À ABORDAGEM BAYESIANA	64
3.5.1. Sobre as Hipóteses Simplificatórias	65
3.5.2. Sobre a Dependência de Contexto	67
3.5.3. Sobre a Inabilidade em Representar a Ignorância	67
3.5.4. Sobre a Não-diferenciação dos Tipos de Incerteza	68
3.6. A PROBABILIDADE SUBJETIVA E A PROBABILIDADE OBJETIVA	70
3.6.1. A Estrutura da Decisão	72
3.6.2. Representação das Probabilidades Subjetivas	74
3.6.3. As Estimativas Probabilísticas do Ser Humano	76
3.6.4. Probabilidade Subjetiva x Probabilidade Objetiva	78
3.6.5. Heurísticas nas Avaliações Probabilísticas	81
3.6.5.a. A Representatividade	81
3.6.5.b. A Desconsideração do Espaço Amostral	81
3.6.5.c. A Brevidade em Estimativas Randômicas	82
3.6.5.d. A Superestimativação em Previsões	82
3.6.5.e. A Avaliabilidade	82
3.6.5.f. Os Ajustes e a Ancoragem	83
3.6.6. Como Evitar as Inconsistências nas Avaliações Probabilísticas	83
3.6.6.a. O Método de Spetzer e Steal von Holstein	84
3.6.6.a1. Motivação	84
3.6.6.a2. Estruturação	84
3.6.6.a3. Condicionamento	84
3.6.6.a4. Codificação	85
3.6.6.a5. Verificação	85
CAPÍTULO IV : TEORIA DOS FATORES DE CERTEZA	
4.1. INTRODUÇÃO	86
4.2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS - A TEORIA DA CONFIRMAÇÃO	87
4.3. O MODELO DA TEORIA DOS FATORES DE CERTEZA	88
4.3.1. Uma Analogia Com Distância Relativa	91
4.3.2. A Medida do Fator de Certeza	92
4.3.3. Interpretação do Fator de Certeza FC	92

4.3.4. Características das Medidas de Crença	93
4.3.4.a. Domínios de Definição para os Graus	93
4.3.4.b. Extensão Evidencial e as Hipóteses de Múta-exclusividade entre as Hipóteses	93
4.3.4.b1. Se $h$ for um Evento Certo ( $P(h/e) = 1$ )	93
4.3.4.b2. Se a Negação de $h$ é um Evento Certo ( $P(-h/e) = 1$ )	93
4.3.5. O Paradoxo da Crença	93
4.3.6. A Plausibilidade dos Fatores de Certeza	94
4.3.7. As Consistências dos FC em Hipóteses Mutuamente Exclusivas	96
4.3.8. Os Fatores de Certeza Aplicados Ao Diagnóstico Médico	98
4.3.8.a. Critérios de Consistência Estatística Para as Medidas de Crença	99
4.3.8.a1. Limites	100
4.3.8.a2. Confirmação ou Disconfirmação absoluta	100
4.3.8.a3. Comutatividade	100
4.3.8.a4. Perda de Informação	100
4.3.9. Funções de Combinação	102
4.3.9.a. Evidência Incrementalmente Adquirida	102
4.3.9.b. Conjunção de Hipóteses	103
4.3.9.c. Disjunção de Hipóteses	103
4.3.9.d. Extensão Evidencial	103
4.3.10. A Plausibilidade da Função de Combinação 4-12	105
4.3.11. Os Fatores de Certeza Segundo o Raciocínio Probabilístico	107
4.3.11.a. A Função de Combinação 4-12 e a Análise Probabilística	108
4.3.11.b. Conjunção e Disjunção de Hipóteses e a Análise Probabilística	110
4.4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS FATORES DE CERTEZA	110
4.4.1. O Mecanismo da Inferência e Atualização dos FC's	111
4.4.2. Exemplos de Propagação de Incerteza em MYCIN	112
4.4.2.a. Exemplo 1	112
4.4.2.b. Exemplo 2	114
4.4.3. A Fase Terapêutica	115
4.5. A EVOLUÇÃO DO MODELO DOS FATORES DE CERTEZA	115
4.6. A COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DOS FATORES DE CERTEZA	118



## CAPÍTULO V : TEORIA DA EVIDÊNCIA

5.1. INTRODUÇÃO	120
5.2. OS FUNDAMENTOS DA TEORIA DA EVIDÊNCIA	120
5.2.1. A Divergência com Relação aos Métodos Bayesianos	120
5.2.2. A Combinação de Evidências	121
5.2.3. O Tratamento da Negação de uma Hipótese	121
5.3. O TRATAMENTO DE INCERTEZA SEGUNDO A TEORIA DA EVIDÊNCIA	122
5.3.1. Um Exemplo de Raciocínio Evidencial	122
5.3.2. Probabilidade Básica Associada	125
5.3.3. A Função de Crença	128
5.3.4. A Combinação das Funções de Crença	129
5.3.4.a. Combinando Duas Funções de Crença	130
5.3.4.b. Condições Necessárias	132
5.3.4.b1. <i>A Soma das Crenças</i>	132
5.3.4.b2. <i>Comutatividade</i>	132
5.3.4.b3. <i>A Crença Associada Ao Conjunto Vazio</i>	132
5.3.4.c. Combinando Várias Funções de Crença	134
5.3.5. O Grau de Crença x O Grau de Dúvida	135
5.3.6. A Função Bayesiana no Contexto da Teoria da Evidência	137
5.4. A COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DA TEORIA DA EVIDÊNCIA	138

## CAPÍTULO VI : TEORIA DOS CONJUNTOS DIFUSOS

6.1. INTRODUÇÃO	140
6.1.1. As Principais Críticas aos Métodos Tradicionais	140
6.1.1.a. Situações Não-Modeláveis por Técnicas Tradicionais	141
6.1.1.a1. <i>A Difusão de Antecedentes e/ou Conseqüentes em Regras</i>	142
6.1.1.a2. <i>O Cobrimento Parcial entre o Antecedente de uma Regra e uma Fato Fornecido pelo Usuário</i>	142
6.1.1.a3. <i>A Presença de Quantificadores Difusos no Antecedente e/ou Conseqüente de uma Regra</i>	142
6.1.2. As Principais Razões Para o Uso da Teoria dos Conjuntos Difusos em Sistemas Especialistas - [ZIM85]	143
6.1.2.a. Interfaces em Linguagem Natural	144

6.1.2.b. A Difusão na Base de Conhecimento	144
6.1.2.c. A Capacidade Inferencial de Transmitir Incerteza	144
6.2. A TEORIA DOS CONJUNTOS DIFUSOS	144
6.2.1. Terminologia	148
6.2.1.a. Conjunto Difuso - [ZIM85]	148
6.2.1.b. O Conceito de Conjunto $\times$ O Conceito Difuso	150
6.2.1.c. Suporte de Conjunto Difuso	150
6.2.1.d. Altura de um Conjunto Difuso	151
6.2.1.e. Conjunto Difuso Normalizado	151
6.2.1.f. Conjuntos de Nível $\alpha$ ou Cortes- $\alpha$	151
6.2.1.g. Convexidade	152
6.2.1.h. Número Difuso	154
6.2.1.i. Cardinalidade	155
6.2.1.ii. Cardinalidade Não-Difusa ou Escalar	156
6.2.1.j. Imprecisão de um Conjunto Difuso	157
6.2.2. Operações com Conjuntos Difusos	157
6.2.2.a. Operações Sobre Conjuntos Clássicos	158
6.2.2.a1. Complemento	159
6.2.2.a2. Igualdade	159
6.2.2.a3. União	159
6.2.2.a4. Intersecção	160
6.2.2.a5. Propriedades	160
6.2.2.b. Complemento de um Conjunto Difuso	161
6.2.2.c. Igualdade de Conjuntos Difusos	161
6.2.2.d. União de Conjuntos Difusos	161
6.2.2.e. Intersecção de Conjuntos Difusos	162
6.2.2.f. Inclusão	162
6.2.2.g. Produto entre Conjuntos Difusos	162
6.2.2.h. Possibilidade Entre um Dado Difuso e um Padrão Difuso	163
6.2.2.i. Necessidade Entre Dado Difuso e Padrão Difuso	163
6.2.2.j. Similaridade entre Conjuntos Difusos	164
6.2.3. Princípio da Extensão	165
6.2.3.a. Produto Cartesiano de Conjuntos Difusos - [DUB80]	165
6.2.3.b. Princípio da Extensão	166
6.2.3.c. Operações Algébricas Extendidas em Conjuntos Difusos	169

6.2.3.c1. Operações em Números Difusos - Operação Binária [DUB80]	169
6.2.3.c2. Teoremas Básicos e Propriedades	169
6.2.3.c3. Adição Extendida - $\oplus$	170
6.2.3.c4. Produto Extendido - $\otimes$	171
6.2.3.c5. Subtração Extendida - $\ominus$	172
6.2.3.c6. Divisão Extendida - $\oslash$	172
6.2.3.c7. Máximo entre Números Difusos ( $\text{Max}_{nd}$ )	172
6.2.3.c8. Mínimo entre Números Difusos ( $\text{Min}_{nd}$ )	172
6.2.4. Relações Difusas	173
6.2.4.a. Composição entre uma Relação Difusa e um Conjunto fuso	174
6.2.5. A Teoria Possibilística	174
a) A Ambigüidade da Linguagem	174
b) A Gramaticidade Parcial da Linguagem Natural	175
c) A Palavra como uma Síntese de um Conceito Generalizado	175
6.2.5.a. Restrição Difusa - [ZIM85]	175
6.2.5.b. Distribuição de Possibilidade	177
6.2.5.c. Medida de Possibilidade	179
6.2.5.c1. Possibilidade Difusa [ZAD78]	180
6.2.5.c2. Possibilidade Difusa para Conjunto Difuso	181
6.2.5.d. Equação de Designação Possibilística	182
6.2.5.e. Postulado da Possibilidade	182
6.2.5.f. Distribuição de Possibilidade Condicional	184
6.2.5.f1. Definição de Zadeh em [ZAD83b]	184
6.2.5.f2. Definição em Dubois e Prade [DUB80]	185
6.3. RACIOCÍNIO APROXIMADO	186
6.3.1. Princípio da Conjunção [DUB80]	188
6.3.2. Princípio da Projeção e Distribuição Marginal de Possibilidade [DUB80]	188
6.3.2.a. Distribuição Marginal de Possibilidade [ZAD81]	189
6.3.2.b. Projeção [ZAD81]	189
6.4. ABORDAGEM DE ZADEH SOBRE A LÓGICA DIFUSA EM SISTEMAS ESPECIALISTAS	190
6.4.1. As Vantagens da Lógica Difusa	190
6.4.1.a. Tratamento de Proposições	191
6.4.1.b. Tratamento de Predicados	191
6.4.1.c. Tratamento dos Quantificadores	191
6.4.1.d. Tratamento dos Modificadores de Predicado	191
6.4.1.e. Qualificação de Proposições	192

6.4.1.e1. <i>Qualificação Verdade</i>	192
6.4.1.e2. <i>Qualificação Probabilística</i>	192
6.4.1.e3. <i>Qualificação Possibilística</i>	192
6.4.2. A Caracterização das Proposições na Base de Conhecimento	192
6.4.2.a. Proposição Incondicional Não-qualificada	192
6.4.2.b. Proposição Incondicional Qualificada	193
6.4.2.c. Proposição Condicional Não-qualificada	193
6.4.2.d. Proposição Condicional Qualificada	193
6.4.3. Teste Semântico de Escore	194
6.4.3.a. Proposições Incondicionais	194
6.4.3.b. Proposições Condicionais	195
6.4.3.c. Tradução de Proposições Para a Forma Canônica	196
6.4.4. O Mecanismo de Dedução	198
6.4.5. Modus Ponens Generalizado	201
6.4.6. A Regra-PE	202
6.4.7. Interpolação	205
6.5. UMA SHELL PARA SISTEMAS ESPECIALISTAS DIFUSOS	208
6.5.1. A Lógica Difusa no Tratamento do Conhecimento Inexato	208
6.5.2. A Descrição Geral do Sistema Z-II	211
6.5.3. A Arquitetura do Sistema Z-II	212
6.5.3.a. O Subsistema de Aquisição de Conhecimento	212
6.5.3.a1. <i>Módulo de Tratamento de Objetos</i>	212
6.5.3.a2. <i>Módulo de Tratamento de Termos Difusos</i>	214
6.5.3.a3. <i>Módulo de Tratamento de Fatos</i>	215
6.5.3.a4. <i>Módulo de Tratamento de Regras</i>	217
I) <i>Expressão Difusa</i>	218
II) <i>Comparações Difusas</i>	219
6.5.3.a5. <i>Módulo de Tratamento das Propriedades do Sistema</i>	221
6.5.3.b. O Subsistema de Consulta	221
6.5.3.b1. <i>Mecanismo de Inferência</i>	222
I) <i>Cadeia de Raciocínio</i>	222
II) <i>Avaliação das Regras com Proposições Simples</i>	225
III) <i>Avaliação das Regras com Múltiplas Proposições</i>	228
IV) <i>Combinação de Evidências</i>	228
6.5.3.b2. <i>Módulo de Aproximação Lingüística</i>	233
I) <i>Aproximação Lingüística dos Valores Lingüísticos</i>	233

II) Aproximação Lingüística das Incertezas Difusas	233
6.5.3.ba. <i>Módulo de Revisões</i>	234
6.6. TRATAMENTO DE INCERTEZA E SUBJETIVISMO EM UM SISTEMA DE APOIO DECISÃO (SAD) PARA A ADMINISTRAÇÃO DO CAPITAL DE GIRO	235
6.6.1. Introdução	235
6.6.2. Sistema SECAGI	236
6.6.3. Tratamento de Imprecisão no Sistema SECAGI	237
6.6.3.a. <i>Módulo Difuso de Decisão Sobre a Forma de Pagamento</i>	238
a) <i>Liquidez da Empresa</i>	238
b) <i>Benefício Real nas Compras à Vista e a Prazo</i>	239
c) <i>A Relação entre a Liquidez e o Benefício da Opção de Compra</i>	242
6.6.3.b. <i>Avaliação das Regras</i>	243
6.6.3.c. <i>Avaliação das Evidências</i>	245
6.6.4. <i>Aplicação</i>	245
6.6.5. <i>Conclusões e Perspectivas</i>	249
 CAPÍTULO VII : ANÁLISE COMPARATIVA, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	
7.1. INTRODUÇÃO	250
7.2. COMPARAÇÕES ENTRE OS QUATRO CÁLCULOS	250
7.2.1. Sobre a Medida de Imprecisão	250
7.2.2. Sobre a Aquisição das Medidas de Imprecisão	251
7.2.3. Sobre o Processo de Atualização das Medidas de Imprecisão	252
7.2.4. Sobre o Tipo de Imprecisão Representado	254
7.2.4.a. Incerteza	254
7.2.4.b. Difusão	254
7.2.4.c. Ignorância	256
7.2.5. Sobre a Complexidade Computacional	257
7.3. REQUISITOS PARA RACIOCINAR COM IMPRECISÃO	259

---

7.4. CONCLUSÕES	261
7.4.1. O Domínio de Aplicação de Cada Técnica	261
7.4.1.a. A Aplicabilidade da Teoria Bayesiana	262
7.4.1.b. A Aplicabilidade da Teoria dos Fatores de Certeza	263
7.4.1.c. A Aplicabilidade da Teoria da Evidência	264
7.4.1.d. A Aplicabilidade da Teoria dos Conjuntos Difusos	265
7.4.1.e. A Aplicabilidade Conjunta das Várias Abordagens	266
7.5. RECOMENDAÇÕES	268
7.5.1. A Ampliação do Trabalho	268
7.5.2. A Pesquisa em Tratamento de Imprecisão	269
7.5.3. O Aprofundamento em uma das Técnicas	270
 CAPÍTULO VIII : REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 271
 APÊNDICE I : ABREVIACÕES	 285
 APÊNDICE II : REFERÊNCIAS CITADAS EM [HIN87]	 286

## CAPÍTULO I INTRODUÇÃO

### 1.1. APRESENTAÇÃO

Esta dissertação está integrada aos trabalhos de pesquisa em Inteligência Artificial do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Nos últimos 3 anos, foram desenvolvidos vários projetos de pesquisa e defendidas dissertações em fundamentos de Inteligência Artificial e em aplicações à Engenharia de Produção.

Neste período de pesquisa, foram defendidas as seguintes dissertações : *"Um Sistema de Treinamento para Operadores de Reservatórios Baseado em Técnicas de Inteligência Artificial"* [THE88]; *"Inteligência Artificial Aplicada à Engenharia Rodoviária"* [ROD90]; *"Um Sistema Especialista para Auxiliar na Elaboração de Recomendações para o Controle da Sarna da Macieira"* [TOD91]; *"Sistemas de Apoio à Decisão : Uma Aplicação na Administração do Capital de Giro sob Inflação"* [LUN91]; *"Uma Interface em Linguagem Natural para um Sistema Especialista de Administração do Capital de Giro"* [MON91] e *"Uma Abordagem de Inteligência Artificial para o Problema de Programação da Produção"* [KER91].

### 1.2. RELEVÂNCIA

#### 1.2.1. Sistemas Especialistas

Embora sejam inúmeros os benefícios originados da utilização de recursos computacionais em atividades das mais variadas áreas do conhecimento, uma questão permaneceu sem resposta até o início da década de 70 : Como fazer com que uma máquina raciocine ou apresente uma performance equiparável à capacidade humana ? Foi no início dos anos 70 que alguns programas computacionais, em determinados domínios científicos, apresentaram um comportamento que indicou o caminho para responder a pergunta anterior. Tratavam-se dos primeiros *Sistemas Especialistas*.

O principal objetivo dos Sistemas Especialistas é, a partir do conhecimento capturado junto a um especialista em uma área particular do conhecimento humano e representado em uma estrutura modular e expandível, transferi-lo para outros usuários deste domínio.

Assim, a proliferação de Sistemas Especialistas pode trazer benefícios nas mais variadas áreas de conhecimento. Por exemplo, um médico pode vir a ter uma segunda "opinião" para seus diagnósticos clínicos, um advogado poderia ter um sistema que lhe ajudasse na busca por casos jurídicos análogos aos seus. Enfim, cada profissional pode potencialmente dispor de um Sistema Especialista para fundamentar suas decisões.

#### 1.2.2. Sistemas Especialistas e Engenharia de Produção

Especificamente na Engenharia de Produção, várias são as possibilidades de implantação de Sistemas Especialistas. Em Programação da Produção, por exemplo, tem-se tentado utilizar heurísticas para resolver problemas de seqüenciamento ([BEN88], [PAR86]) e planejamento ([RIX86]) da produção. Na área financeira, verifica-se uma série de aplicações relacionadas às decisões empresariais em áreas como orçamento ([MYE88]), análise microeconômica ([HOF86]) e administração ([CLI86], [PAU86], [IWA86]).

Outra área de aplicação potencial de Sistemas Especialistas no ambiente empresarial relaciona-se à administração do Capital de Giro. Tem-se verificado que uma série de decisões relacionadas ao Capital Circulante empresarial são fundamentadas na experiência de um especialista. Esta realidade tem gerado dificuldades mais notadamente nas pequenas e médias empresas em geral, pois estas, ao contrário dos grandes conglomerados empresariais, não possuem condições financeiras que permitam a contratação e manutenção de especialistas exclusivos à gestão do capital de giro. Decisões errôneas podem levar à descapitalização



e/ou imobilização excessivas das empresas, incapacitando-as de gerarem capitais excedentes que suportem investimentos na busca por novos patamares quantitativos e qualitativos de produção [BAT90].

Uma alternativa seria tornar este conhecimento especializado acessível a várias empresas, na forma de um Sistema Especialista em Administração do Capital de Giro, a fim de auxiliá-las na resolução deste que se constitui em um de seus problemas mais cruciais [SEC90].

### 1.2.3. O Tratamento de Imprecisão na Construção de Sistemas Especialistas

Um obstáculo à proliferação dos Sistemas Especialistas é, sem dúvidas, o fato de a sua construção não constituir tarefa simples. Para efetivá-la, é necessário a formação em áreas como Aquisição de Conhecimento, Representação de Conhecimento, Mecanismos de Inferência, Estratégias de Controle, Interface com Usuário e Tratamento de Imprecisão. Bonissone [BON85] afirma que, enquanto as cinco primeiras áreas de pesquisa têm sido extensivamente estudadas, com importantes progressos verificados, o mesmo não ocorre em Tratamento da Imprecisão. Entretanto, para que uma resposta realmente satisfatória à nossa pergunta inicial seja possível, a capacidade de raciocinar e resolver problemas sob imprecisão nas informações e no próprio conhecimento é imprescindível.

A figura 1-1 (pg. 4) situa o Tratamento de Imprecisão no âmbito da construção de Sistemas Especialistas. Nela estão esquematizados os diferentes tipos de imprecisão presentes em sistemas especialistas, as abordagens tratadas no presente trabalho e os respectivos tipos que cada uma considera em suas formulações.

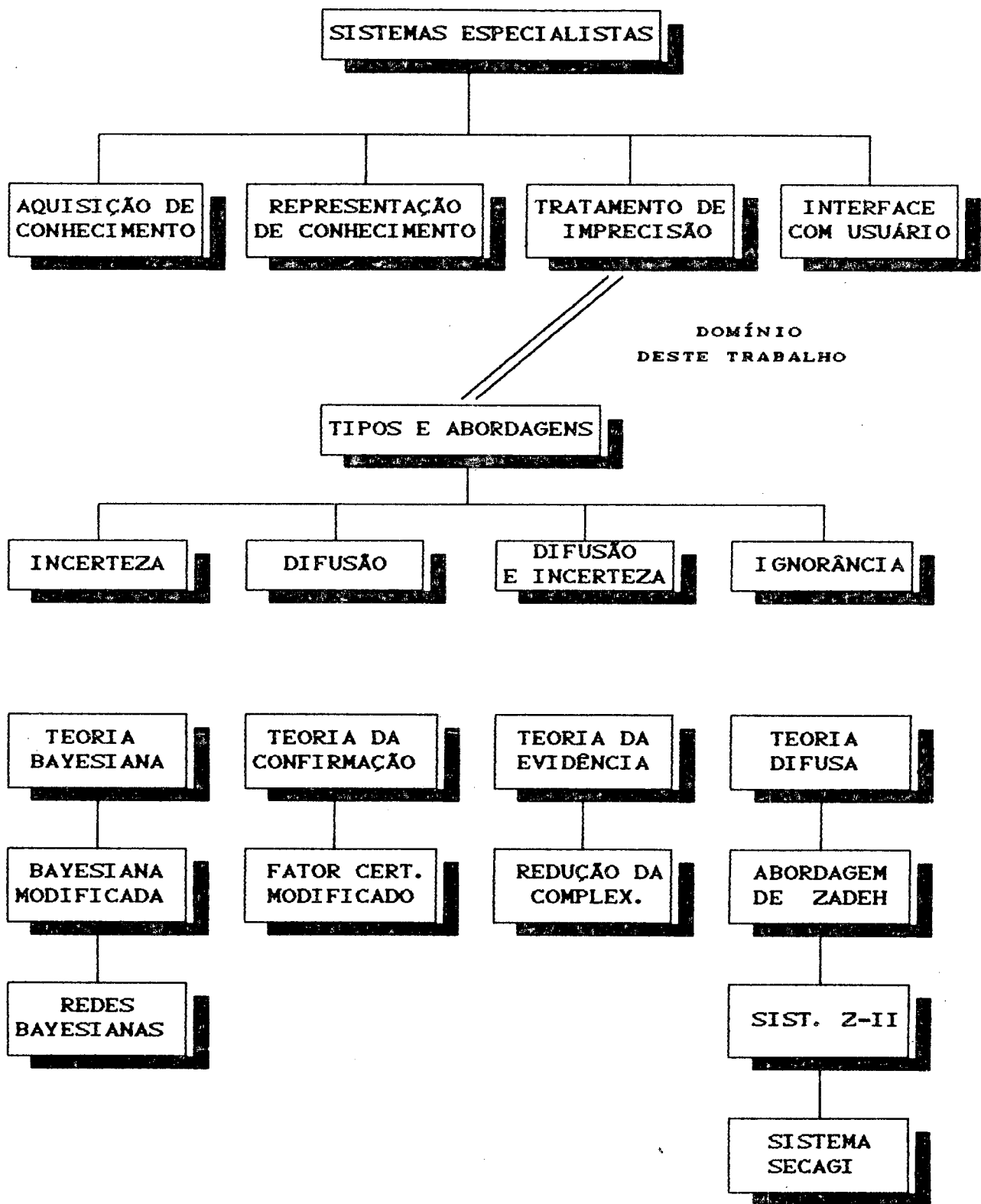


FIGURA 1-1 : Domínio da Inteligência Artificial no Qual se Situa o Presente Trabalho

Uma análise do problema do Tratamento de Imprecisão permite constatar que sua complexidade é maior que aquelas encontradas nas demais áreas afetas à construção de Sistemas Especialistas. No Tratamento de Imprecisão, não tem sido possível encontrar métodos *normativos*, universalmente aplicáveis nas mais variadas situações problemáticas. Em decorrência, diversas técnicas têm sido estudadas e propostas na literatura para capacitar os Sistema Especialistas a raciocinar sob imprecisão.

A variedade de abordagens surge basicamente de dois fatores distintos. De um lado, tenciona-se modelar a imprecisão sem comprometer a performance dos sistemas ou sem necessitar extrair estimativas do especialista que ele não utiliza normalmente (caso das abordagens probabilísticas não-bayesianas). Além disso, tem-se procurado considerar também a imprecisão não-modelável por métodos convencionais (caso da abordagem difusa e abordagens não-numéricas).

Dentre as diversas abordagens, as mais intensivamente divulgadas em Inteligência Artificial têm sido os Métodos Probabilísticos (em particular, o Bayesiano), os Fatores de Certeza (abordagem utilizada no sistema MYCIN), a Teoria da Evidência de Dempster e Shafer e a abordagem da Teoria Difusa. Além destas, verifica-se também a existência de abordagens não-numéricas, cujo maior objetivo é manter uma das principais características dos Sistemas Especialistas, o Raciocínio Simbólico, significativamente alterada pela utilização de avaliações numéricas para representar as imprecisões [SHA87b].

Segundo Chandrasekaran e Tanner [CHA86], o ser humano é um especialista em resolução de imprecisão por não fazê-lo de modo único para as diferentes situações possíveis. Deste modo, buscar um método *normativo* e universal obscurece a importância de se entender as características dos diferentes métodos e estruturas do problema, utilizadas pelo ser humano.

É essencial ao projetista de um Sistema Especialista o conhecimento da mais ampla variedade de técnicas de Tratamento de Imprecisão, de modo a poder modelar a imprecisão em diversas situações, analogamente ao que faz o ser humano [FRA88].

### 1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO

Os objetivos do presente trabalho são basicamente dois. Inicialmente, tenciona-se apresentar um levantamento do "estado da arte" no Tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas; além disso, objetiva-se possibilitar que este levantamento possa partir de base inicial para futuros trabalhos em Tratamento de Imprecisão em Inteligência Artificial.

Acredita-se que o levantamento do "estado da arte" possibilite ao leitor interessado em que seu Sistema Especialista possa tratar a imprecisão identificar qual das abordagens existentes melhor se adequa ao domínio de conhecimento afeto por seu sistema. Para tal, aborda-se os fundamentos teóricos, principais características e complexidades de cada uma das principais técnicas anteriormente mencionadas.

Uma das constatações originárias dos estudos aqui relatados é a de que muito ainda há por fazer e se pesquisar em Tratamento de Imprecisão. Assim, acredita-se que cada uma das diferentes abordagens deva continuar a proporcionar contribuições significativas, indicando a necessidade do aprofundamento dos estudos nas diferentes técnicas. Deste modo, tenciona-se que possíveis trabalhos neste sentido, eventualmente mais específicos a determinada(s) técnica(s), possam encontrar aqui um ponto de partida no que se refere aos fundamentos e levantamento bibliográfico necessários.

#### 1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em oito capítulos. Contudo, cabe ressaltar que a leitura não necessita seguir a ordem aqui estabelecida. Assim, por exemplo, o leitor interessado apenas em conhecer como a Teoria dos Conjuntos Difusos aborda o problema do tratamento de imprecisão pode ir diretamente para o capítulo VI, sem se preocupar com os demais. Quando houver relacionamento com os capítulos anteriores, indica-se o fato no capítulo em estudo.

A seguir, sintetiza-se os principais conteúdos dos capítulo II a VIII.

No Capítulo II são abordadas determinadas características do Raciocínio Humano e os diferentes tipos de imprecisão que podem surgir em Sistemas Especialistas. Os principais objetivos são identificar os diferentes tipos de raciocínio que o ser humano utiliza ao resolver problemas, suas relações com os fundamentos de cada técnica no Tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas e as diferentes formas com que a imprecisão surge nestes sistemas.

Nos capítulos III ao VI, apresenta-se uma revisão das principais técnicas existentes para o Tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas. Para cada técnica, tem-se uma revisão dos principais conteúdos teóricos, uma abordagem crítica das principais vantagens e dificuldades ao se utilizá-la e exemplos práticos cuja finalidade é a de ilustrar o mecanismo de manipulação da imprecisão respectivo a cada técnica.

No capítulo III, descreve-se a primeira e mais conhecida técnica de Tratamento de Imprecisão entre os pesquisadores da Inteligência Artificial, a *Abordagem Bayesiana*. Além de ser a mais tradicional abordagem, o Tratamento Bayesiano possui forte base teórica e se constitui em uma das principais linhas de pesquisa no Tratamento de Incerteza em Sistemas Especialistas.

No capítulo IV, apresenta-se um dos principais Tratamentos de Incerteza já implementados em Sistemas Especialistas : os *Fatores de Certeza*. Apesar de a literatura colocar este tratamento como um subconjunto de outros (principalmente da Teoria da Evidência), considerou-se neste trabalho de fundamental importância sua descrição, visto que sua implementação computacional é disponível em Sistemas Especialistas desde os anos 70.

No capítulo V discorre-se sobre uma técnica que foi ganhando adeptos alguns anos depois de ter sido apresentada, a *Teoria da Evidência de Dempster e Shafer*. Nesta teoria, dispõe-se de um tratamento alternativo à Abordagem Bayesiana, restringindo-se a apenas alguns dos axiomas da Probabilidade. O interesse por este tratamento tem aumentado entre os pesquisadores da Inteligência Artificial por sua facilidade em atribuir crença a subconjuntos de hipóteses, situação bastante freqüente na explicitação do conhecimento dos especialistas.

A última técnica abordada neste trabalho encontra-se no capítulo VI, a *Abordagem Difusa*. Fundamentada na Teoria dos Conjuntos Difusos de Zadeh, esta abordagem direciona-se ao tratamento das duas formas de imprecisão em Sistemas Especialistas, a incerteza e a difusão.

No capítulo VII, são apresentadas as conclusões e recomendações deste trabalho, além de um esquema comparativo entre as técnicas.

Finalmente, no oitavo capítulo o leitor encontrará as Referências Bibliográficas e adendos necessários.

## CAPÍTULO II

### O RACIOCÍNIO HUMANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E OS TIPOS E ORIGENS DE IMPRECISÃO EM S.E.

#### 2.1. INTRODUÇÃO

Um requisito esperado dos Sistemas Especialistas é que estes exibam uma capacidade de resolução de problemas, em certos domínios restritos, equiparável à capacidade humana. A principal característica que diferencia Sistemas Especialistas de sistemas convencionais também é o principal subsídio que os primeiros possuem para atingir este requisito. Enquanto os sistemas convencionais possuem um mecanismo de resolução procedural pré-estabelecido, os Sistemas Especialistas utilizam o conhecimento humano em determinado domínio, representado em uma base de conhecimento, e um mecanismo de inferência que atua sobre esta base, em busca de soluções.

Uma primeira questão abordada neste capítulo é a resolução de problemas pelo ser humano. O estudo desta questão permite visualizar a organização do conhecimento e o mecanismo de inferência que o ser humano utiliza. Pode-se dizer que quanto mais fidedignamente este conhecimento for representado em um sistema especialista, melhor será o desempenho deste sistema.

Uma análise do processo de resolução de problemas por parte do ser humano evidencia que este frequentemente considera situações com informações de natureza qualitativa, incompleta ou incerta. Para o ser humano, quando a busca por determinada solução pressupõe o tratamento de informações de tal natureza, este fato não constitui obstáculo intransponível. Para os sistemas especialistas, no entanto, o tratamento deste tipo de informações é problemático e tem sido alvo de amplos estudos.

Este capítulo tem por objetivo abordar o raciocínio humano empregado na resolução de problemas, sua representação a



nível computacional e os tipos e origens de imprecisão que podem estar presentes em informações.

## 2.2. O RACIOCÍNIO HUMANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, considerar-se-á os aspectos do raciocínio humano cuja formalização a nível computacional tem sido possível com as técnicas hoje existentes. O objetivo consiste em determinar as potencialidades humanas que, uma vez implementadas em sistemas computacionais, pudessem caracterizá-los como sistemas "inteligentes" (ou capazes de "raciocinar").

Fischler e Firschein [FIS87] sugerem três requerimentos para que um sistema tenha capacidade de raciocínio:

- a) O sistema deve ser capaz de resolver uma ampla gama de problemas, incluindo formulações para as quais não foi projetado.
- b) O sistema deve ser capaz de explicitar informações implícitas, ou seja, de uma informação qualquer ele deve ser capaz de derivar todas suas representações equivalentes.
- c) O sistema deve ter uma *estrutura de controle* que determine que transformações aplicar, quando obteve uma informação ou quando um esforço adicional será inútil.

Adicionalmente, pode-se exigir do sistema a capacidade de manipular informações qualitativas, incompletas ou incertas. Além disso, todos estes requerimentos (que são potencialidades humanas) devem ser formalizados conjuntamente com determinado grau de eficiência computacional.

Representar computacionalmente estas potencialidades humanas pressupõe a compreensão do raciocínio humano. As interpretações do raciocínio humano diferem de acordo com o contexto em que ele tem sido abordado. Até o século XX, a Lógica e a Psicologia do pensamento eram consideradas como sinônimos. Assim, tomava-se a Lógica Clássica e a Teoria da Probabilidade como ideais e o raciocínio humano como um desvio deste ideal. A

partir deste século, iniciaram-se estudos do pensamento segundo a ótica da Biologia. Foram realizados vários experimentos em percepção visual e linguagem humanas que buscaram uma maior compreensão de como o ser humano raciocina e organiza o conhecimento [FIS87].

Entender o mecanismo de raciocínio sob a ótica biológica, entretanto, mostra-se ser uma tarefa extremamente complexa, dadas as dificuldades nos experimentos, oriundas do excessivo número de variáveis, de questões alheias ao processo natural de raciocínio e da dificuldade em se extrair, a partir de experimentos, o real mecanismo utilizado pelo ser humano. Assim, apesar do grande número de trabalhos de investigação biológica do processo humano de raciocínio, resultados concretos diretamente transformáveis em representações computacionais são ainda praticamente inexistentes [FIS87].

É interessante observar, entretanto, que uma maior compreensão da complexidade e da eficiência do raciocínio humano na resolução de problemas, quando comparada à capacidade de resolução de sistemas computacionais baseados na Lógica Clássica, levaram a uma mudança de paradigma. Isto é, o sistema biológico passou a ser visto como ideal e os sistemas computacionais como devendo aproximar-se deste.

Para emular computacionalmente o raciocínio humano na resolução de problemas, uma abordagem pragmática tem sido a verificação das estratégias de resolução adotadas pelo ser humano. Pode-se enquadrar o raciocínio humano em três categorias quanto às estratégias de resolução :

- Raciocínio Dedutivo
- Raciocínio Indutivo
- Raciocínio Analógico

A seguir, cada um destes tipos de raciocínio é abordado.

### 2.2.1. Raciocínio Dedutivo

O Raciocínio Dedutivo consiste em, a partir de proposições já comprovadas, fazer inferências através das quais outras proposições verdadeiras podem ser obtidas.

Em um sistema computacional baseado em regras que se utiliza do Raciocínio Dedutivo, a conclusão é "herdada" das (ou está implícita nas) premissas, através da construção de uma cadeia dedutiva, de maneira análoga à realizada pelos seres humanos.

A essência de um sistema dedutivo é a manutenção da validade ou consistência, o que impossibilita a validação simultânea de uma proposição e sua contradição. Assegurar esta propriedade tem um alto preço : os sistemas dedutivos são extremamente ineficazes frente a certos tipos de informação. O mecanismo dedutivo puro mostra-se inadequado em situações de Raciocínio Probabilístico, de informações qualitativas ou incompletas [FIS87].

#### 2.2.1.a. O Formalismo do Raciocínio Dedutivo

Para que sistemas computacionais possam ter um mecanismo de resolução baseado em Raciocínio Dedutivo, faz-se necessário uma formalização. Kimbrough e Lee [KIM88a] afirmam ser a Lógica uma ferramenta interessante para realizar esta formalização, dadas as características do Raciocínio Dedutivo.

Formalizar o Raciocínio Dedutivo consiste em expressar as situações reais em notação de Lógica Formal e deduzir novos fatos a partir de um conjunto de premissas validadas. Para uma melhor caracterização das representações formais de Raciocínio Dedutivo, uma breve revisão dos conceitos de Lógica Clássica é realizada a seguir.

##### 2.2.1.a1. Lógica Clássica

Os mecanismos utilizados na formalização do Raciocínio Dedutivo estão fundamentados na Lógica Clássica, assim chamada por

ter sido originada do primeiro estudo sobre Lógica conhecido, creditado a Aristóteles (384 - 322 a.c.). A Lógica Clássica trabalha essencialmente com verdades e falsidades de um argumento. Como exemplo considere-se as sentenças abaixo e suas respectivas representações simbólicas :

Jader é analfabeto.	$J \rightarrow A$
Todo analfabeto não sabe ler.	Todos $A \rightarrow NL$
Portanto, Jader não sabe ler.	Então $J \rightarrow NL$

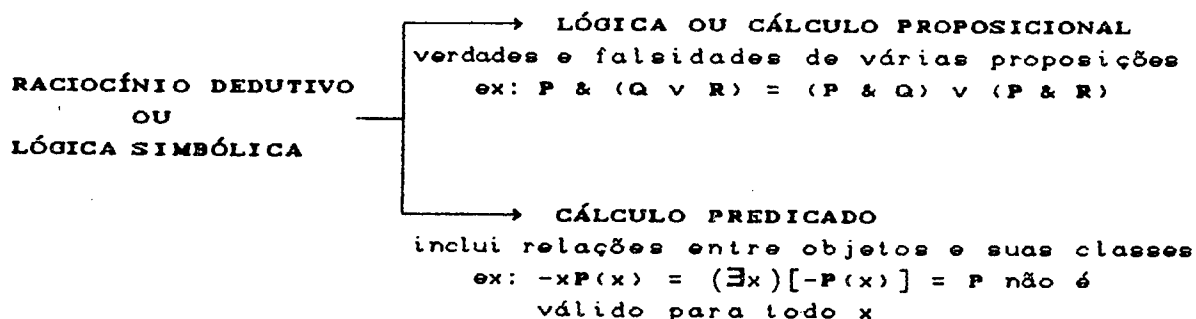
onde "  $\rightarrow$  " deve ser lido como "implica" ou "é".

Segundo Schildt [SCHI87], por ser baseada na Linguagem Natural, a Lógica Clássica pode levar aos mesmos problemas corriqueiros no uso da linguagem, ou seja, dubiedade e/ou imprecisão. Para eliminar estes problemas, surgiu a invenção da *Lógica Simbólica*.

#### 2.2.1.2. Lógica Simbólica ou Booleana

Reputa-se a George Boole (1815-1864) a Lógica Simbólica, também denominada de Lógica Booleana, embora seu início tenha se dado com W. Leibnitz (1646-1717), cujo trabalho em Lógica foi esquecido com sua morte [SCHI87].

Em Lógica Simbólica, símbolos e suas interconecções, negligenciados pela Lógica Clássica, são tratados através de operadores.



#### 2.2.1.3. Lógica Proposicional

A Lógica Proposicional trata com expressões do tipo "A aceleração da gravidade é 9,81 m/s", "A base dos logaritmos

neperianos, o número  $e$ , é 3,1415926". Tais proposições, segundo a Lógica Proposicional, são classificadas, respectivamente, por V ("verdadeira") e F ("falsa").

### I) Conectivos da Lógica Proposicional

Para trabalhar com várias proposições, a Lógica Proposicional utiliza operadores a fim de efetuar suas conexões, caracterizando os seguintes conectivos:

#### i) Negação - NÃO (-)

Simbolizada pelo operador NÃO (-), a negação de uma sentença  $P$  significa " $P$  não é verdade". Em Lógica Proposicional, Se  $P$  é verdade, então  $\neg P$  é falso e vice-versa.

#### ii) Conjunção - E (&)

A Conjunção de duas sentenças  $P$  e  $Q$  é designada por  $P \& Q$  (lê-se  $P$  E  $Q$ ) e significa que tanto  $P$  como  $Q$  são verdades.

#### iii) Disjunção - OU ( $\vee$ ),

A Disjunção de duas sentenças  $P$  e  $Q$  é designada por  $P \vee Q$  (lê-se  $P$  OU  $Q$ ) e é verdade se ao menos uma das proposições  $P$  e  $Q$  é verdade.

#### iv) Implicação - IMPLICA ( $\rightarrow$ ),

A implicação entre duas sentenças  $P$  e  $Q$ , designada por  $P \rightarrow Q$ , representa "Se  $P$  então  $Q$ ", onde  $P$  é denominado *Antecedente* e  $Q$  *Consequente*. A sentença é falsa somente se  $P$  é verdade e  $Q$  é falso, sendo verdadeira para outras combinações. Não há necessariamente casualidade entre  $P$  e  $Q$ , como no uso corriqueiro da relação *se-então* [FIS87].

#### v) Equivalência - EQUIVALE (=).

Duas expressões  $P$  e  $Q$  são equivalentes ( $P$  EQUIVALE A  $Q$  ou  $P = Q$ ) se designam a mesma verdade.

Em Lógica Proposicional, qualquer proposição pode ser colocada na forma  $(P1) \& (P2) \dots$ , onde  $P1$ ,  $P2$ , etc são denominadas "cláusulas", sendo formadas a partir de expressões com disjunções ou negações de variáveis. As cláusulas podem ser resolvidas por eliminação de variáveis, ou seja, expressões podem ser convertidas e reavaliadas quanto à veracidade [FIS87]. As formalizações e conversões de expressões ocorrem mediante relações (propriedades)

de equivalência proposicional, a seguir relacionadas.

## II) Equivalências e Propriedades da Lógica Proposicional

### i) Comutativa

$$P \& Q = Q \& P$$

$$P \vee Q = Q \vee P$$

### ii) Associativa

$$(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$$

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

### iii) Leis de DeMorgan

$$-(P \vee Q) = -P \& -Q$$

$$-(P \& Q) = -P \vee -Q$$

A manipulação da veracidade ou falsidade de várias sentenças em Lógica Proposicional está fundamentada nestas três propriedades. Dentre as construções passíveis de serem realizadas, uma assume especial importância neste trabalho, já que fundamenta um dos principais mecanismos de inferência utilizados em Sistemas Especialistas. Trata-se da seguinte regra de inferência :

V	O Estoque está vazio
$V \rightarrow C$	SE o Estoque está vazio, ENTÃO Efetuar novas compras
C	Efetuar novas compras.

Informalmente, esta inferência pode ser expressa por "Se V é verdade e se  $V \rightarrow C$ , então pode-se inferir que C é verdade". Esta regra dedutiva é denominada "*Modus Ponens*" e constitui a base da maioria dos mecanismos de inferência presentes em Sistemas Especialistas.

Embora a Lógica Proposicional forme a base tanto para a linguagem inteligente como para a computacional [SCH187a], seu potencial de comunicação é limitado [FIS87]. A Lógica Proposicional é incapaz de compor sentenças a partir da forma primitiva dos objetos ou de suas propriedades ou relações, somente o fazendo a partir de elementos primitivos associáveis a

valores-verdade. Fischler e Firschein [FIS87] exemplificam lembrando que não há maneira de se representar um objeto, tal como "Chaplin" sem explicitar algo sobre ele, como "Chaplin é um Gênio". Além disso, relações ou propriedades aplicáveis a alguns ou todos indivíduos não podem ser representadas sem serem exaustivas. Este tipo de limitações é superado pelo *Cálculo Predicado*.

#### 2.2.1.a4. *Cálculo Predicado*

A segunda forma da Lógica Simbólica, o *Cálculo Predicado* (também chamado de *Lógica Predicado*), é uma expansão da *Lógica Proposicional* através da introdução de termos, funções, predicados e quantificadores [FIS87]. A seguir cada um destes elementos do *Cálculo Predicado* é caracterizado.

##### I) Objetos

Os objetos caracterizam as variáveis e servem como funções gramaticais de pronomes e substantivos comuns. São termos como "lucro", "Ghandi" ou variáveis não especificadas, como  $x$ ,  $y$  ou  $z$  [FIS87].

##### II) Predicado

O *Cálculo Predicado* tem, evidentemente, como base os predicados, os quais são uma função denotando uma relação entre objetos. Quando a relação é unária, representa uma propriedade do objeto. Por exemplo,  $velho(x)$  é uma expressão predicado que significa que  $x$  é velho. Uma relação binária explicita uma relação entre objetos. Por exemplo,  $Pai(Antônio, Beto)$  implica que Antônio é o pai de Beto. Um predicado pode assumir os valores "verdadeiro" ou "falso", de acordo com as variáveis às quais se refere.

##### III) Quantificadores

Uma das principais vantagens do *Cálculo Predicado* sobre a *Lógica Proposicional* é a presença de quantificadores. Eles permitem generalizações ou atribuições individuais, eliminando a explicitação exaustiva da *Lógica Proposicional*. Os quantificadores

valores-verdade. Fischler e Firschein [FIS87] exemplificam lembrando que não há maneira de se representar um objeto, tal como "Chaplin" sem explicitar algo sobre ele, como "Chaplin é um Gênio". Além disso, relações ou propriedades aplicáveis a alguns ou todos indivíduos não podem ser representadas sem serem exaustivas. Este tipo de limitações é superado pelo *Cálculo Predicado*.

#### 2.2.1.a4. *Cálculo Predicado*

A segunda forma da Lógica Simbólica, o *Cálculo Predicado* (também chamado de *Lógica Predicado*), é uma expansão da *Lógica Proposicional* através da introdução de termos, funções, predicados e quantificadores [FIS87]. A seguir cada um destes elementos do *Cálculo Predicado* é caracterizado.

##### I) Objetos

Os objetos caracterizam as variáveis e servem como funções gramaticais de pronomes e substantivos comuns. São termos como "lucro", "Ghandi" ou variáveis não especificadas, como  $x$ ,  $y$  ou  $z$  [FIS87].

##### II) Predicado

O *Cálculo Predicado* tem, evidentemente, como base os predicados, os quais são uma função denotando uma relação entre objetos. Quando a relação é unária, representa uma propriedade do objeto. Por exemplo,  $velho(x)$  é uma expressão predicado que significa que  $x$  é velho. Uma relação binária explicita uma relação entre objetos. Por exemplo,  $Pai(Antônio, Beto)$  implica que Antônio é o pai de Beto. Um predicado pode assumir os valores "verdadeiro" ou "falso", de acordo com as variáveis às quais se refere.

##### III) Quantificadores

Uma das principais vantagens do *Cálculo Predicado* sobre a *Lógica Proposicional* é a presença de quantificadores. Eles permitem generalizações ou atribuições individuais, eliminando a explicitação exaustiva da *Lógica Proposicional*. Os quantificadores



utilizados são os seguintes:

a) para todo ( $x$ ), representado por ( $x$ ) ou pelo símbolo  $\forall$ .

exemplo : "todo país possui moeda" pode ser expresso por :  
 $\forall x \text{ [ país } (x) \rightarrow \text{ moeda } (x) ]$ .

b) existe, representado pelo símbolo  $\exists$ .

exemplo : "existe um país cuja moeda é o cruzeiro" pode ser expresso por :  $\exists x \text{ / moeda } (x) = \text{"cruzeiro"}$ .

A resolução de problemas fundamentada em Cálculo Predicado pressupõe a conversão de expressões para a fórmula de cláusula. Fischler e Firschein [FIS87] apresentam a sequência de operações que permitem efetivar tais conversões. Através destas operações, retira-se os conectivos e quantificadores presentes nas expressões.

#### 2.2.1.b. A Lógica e o Raciocínio Humano

Alguns pesquisadores acreditam que se os computadores forem capazes de entender a Lógica, serão capazes de raciocinar. Ao fazerem isto, partem do pressuposto de que a Lógica é o centro da Inteligência [HER87]. Entretanto, experimentos têm demonstrado que, enquanto certas propriedades da Lógica formal são intuitivas às pessoas, há outras que não o são [FIS87].

Um exemplo ilustrativo é apresentado por Fischler e Firschein [FIS87]. Trata-se do experimento de Anderson, no qual a seguinte questão foi colocada a um grupo de pessoas : "Alguns B's são A's. C's não são B's. Então alguns A's não são C's". 60% das pessoas consideraram inválida a conclusão. Isto evidencia a dificuldade humana em raciocinar segundo o diagrama de Venn. Já há quase 70 anos, Bertrand Russel<sup>1</sup> afirmava :

---

<sup>1</sup> Russel revolucionou o pensamento científico de que a Lógica de Aristóteles fundamenta todos os procedimentos da razão ao formular o "Paradoxo de Russel" (detalhes em [BARCOO]).

*"Toda Lógica tradicional habitualmente assume que símbolos precisos estão sendo aplicados. Ela não é, portanto, aplicável à vida terrestre, mas somente em uma existência celestial imaginada ... a Lógica coloca-nos mais próximos ao céu do que outros estudos."* [GAI77]

O Cálculo Predicado de Primeira Ordem não permite representar relações entre predicados, relações temporais, considerações hipotéticas, crenças e asserções possibilísticas ou vagas, baseadas em informação incompleta. Estes fatos originaram o desenvolvimento de Lógicas que violam determinados princípios pressupostos pela Lógica Clássica, visando solucionar estas limitações da abordagem tradicional [FIS87].

Assim, a representação do tempo, relevante em raciocínio automático e diagnóstico, tem sido possível através da *Lógica Temporal*. O tratamento da noção de crença dá-se na *Lógica Modal*, segundo os conceitos de necessidade e possibilidade. Outra limitação da Lógica Clássica é o fato de que nesta, os sistemas aumentam a quantidade de verdades quando conhecimentos são adicionados e uma inferência realizada, sem que haja mecanismos para descartar informações ou revisar as crenças. Esta característica é denominada "monotonicidade". A *Lógica Não-monotônica* enfrenta esta questão, permitindo-se que inferências possam ser feitas na base de dados disponíveis, podendo-se rejeitá-las quando do surgimento de novos dados [FIS87].

Para o presente trabalho, das lógicas alternativas relacionadas ao raciocínio dedutivo, a mais relevante é a *Lógica Difusa*, por fundamentar uma das mais divulgadas técnicas de Tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas.

## 2.2.1.c. A Lógica Difusa

Zadeh, reportando-se à necessidade do Tratamento da Imprecisão presente no raciocínio humano, em 1972 afirmava :

*"Em geral, a complexidade e a precisão estão em uma relação inversa, no sentido de que quando a complexidade de um problema aumenta, a possibilidade de analisá-lo em termos precisos diminui. Assim, o "pensamento difuso" pode não ser negligenciável, se ele torna possível a solução de problemas que são muito complexos para uma análise precisa."* [GAI77]

A fim de se evidenciar a principal diferença entre a Lógica Difusa e a Lógica Clássica, pode-se inicialmente considerar, de forma resumida, que a Lógica Clássica fundamenta-se em três princípios básicos :

I. *Princípio da Identidade* :  $X = X$

II. *Princípio do Terceiro Excluído* :

*Dados a e não a, uma é verdadeira.*

III. *Princípio da Contradição* :

*Dados a e não a, uma é falsa.*

As demais Lógicas, como evidenciado anteriormente, diferem da Lógica Clássica pela violação a estes princípios. Especificamente, quando o princípio da contradição é violado, surgem as Lógicas Paraconsistentes, aplicáveis em determinadas situações onde existem informações contraditórias. A Lógica Difusa enquadra-se dentre as Lógicas Paraconsistentes [COS89].

A consideração da contradição, de fato, está implícita na Teoria Difusa. Para explicitá-la, é necessário comparar as lógicas Booleana e Difusa. Como afirma Gaines [GAI80], enquanto as lógicas clássicas consideram valores-verdade tais como verdadeiro, falso e desconhecido ou indeterminado, elas tomam estas últimas como questões epistêmicas e desconsideram o fato de que a verdade é por si mesma uma questão de grau. Em outras palavras, ao atribuir um determinado grau à verdade de uma afirmação, a Lógica

Difusa admite a contradição (uma vez que não se exige que o grau afirmativo seja o complemento do grau negativo).

#### 2.2.1.c1. Da Modelagem à Representação

A Lógica Difusa considera que o conhecimento humano deve ser tratado como tal, sem necessariamente modelá-lo para a "exatidão". Deve-se ter em mente que o raciocínio humano é por natureza "aproximado" e qualquer técnica de modelá-lo diferentemente está desprezando a principal vantagem humana, qual seja a de tratar diretamente com conceitos inexatos [GAI77].

Enquanto técnica, a Lógica Difusa difere dos demais ramos da matemática difusa por estar principalmente voltada à representação do conhecimento. Assume-se que o conhecimento além de ser considerado em sua forma lingüística, deve estar operacionalmente implementado de modo a ser eficientemente tratado por ferramentas computacionais [GAI80].

#### 2.2.2. Raciocínio Indutivo

A segunda categoria de raciocínio que o ser humano utiliza para resolver determinados problemas é o Raciocínio Indutivo. Esta forma de raciocínio consiste basicamente, em, a partir de um subconjunto amostral, tentar encontrar alguma generalização ou abstração que descreva ou classifique um conjunto de dados e extrapolar para um conjunto mais amplo. Estas generalizações e a inferência nelas fundamentadas são indutivas porque sempre é possível que as conclusões iniciais sejam invalidadas por nova evidência, adquirida ao se observar uma amostra maior ou mesmo uma nova amostra [FIS87].

Fischler e Firschein [FIS87] salientam que, apesar dos riscos envolvidos, o Raciocínio Indutivo é utilizado corriqueiramente tanto no cotidiano como em investigações científicas.

A fim de ilustrar o mecanismo de raciocínio por indução,

Fischler e Firschein [FIS87] propõem o seguinte exemplo: "Encontrar o próximo número na sequência <1,2,4,8,16>". A maioria das pessoas responderia "32", sem solicitar qualquer especificação adicional ao problema. Os autores afirmam que a existência de mais do que uma resposta aceitável é uma característica típica de problemas em indução (no exemplo, qualquer número seria uma resposta permissível [FIS87], pois nenhuma restrição é colocada no problema). Isto permite a extrapolação e genericamente impossibilita a checagem da resposta quanto à sua veracidade.

Comparativamente ao Sistema Dedutivo, as seguintes características do Sistema Indutivo são apontadas por Fischler e Firschein [FIS87] :

- a) Na indução, há um conjunto de restrições a satisfazer, enquanto na dedução deve-se apresentar uma asserção explícita. As premissas apóiam mas não englobam a conclusão derivada, como no caso dedutivo.
- b) Outra distinção importante é o número de evidências que devem ser invocadas para derivar nova asserção. A fim de assegurar a consistência e respeitar questões computacionais, os sistemas dedutivos usam longas cadeias de raciocínio de pequenos passos, onde, em cada passo, somente um pequeno subconjunto do total de fatos conhecidos pelo sistema é explicitamente considerado. Os sistemas dedutivos, portanto, não levam em conta a perspectiva "global" ao resolver o problema.

No caso indutivo, usa-se cadeias de raciocínio curtas e de grandes passos, tentando-se usar explicitamente, tanto quanto possível, toda informação disponível em qualquer passo, desde que elas dependam do consenso, a fim de assegurar a veracidade das conclusões [FIS87].

- c) Enquanto os sistemas dedutivos são incapazes de considerar conflitos nas evidências, devido às contradições lógicas, o sistema indutivo é capaz de fazer previsões na presença de evidências conflitantes. Estas previsões nem sempre são verdadeiras, mas são boas estimativas que tornam efetivo o uso da informação disponível [FIS87].

Uma comparação mais pragmática entre o Raciocínio Dedutivo e o Indutivo é feita por Robert Pirsig, em seu livro "Zen e a Arte de Manutenção de Motocicletas" [PIR84]. A seguir, transcreve-se suas palavras :

"Existem dois tipos de raciocínio lógico, o indutivo e o dedutivo. As inferências indutivas começam com o exame da máquina e permitem chegar a conclusões gerais. Por exemplo, se a motocicleta falha ao passar sobre uma saliência, depois passa por cima de outra saliência e falha, depois falha de novo ao passar por uma terceira saliência, correndo normalmente num longo trecho liso e reto de estrada, e depois falha ao passar por uma quarta saliência, chega-se à conclusão lógica de que a falha é causada pelas irregularidades da estrada. É o raciocínio indutivo : o raciocínio a partir das experiências particulares, visando às verdades gerais.

Com as inferências dedutivas, o processo é inverso. Começamos com o conhecimento geral e prevemos uma observação específica. Por exemplo, se consultando a hierarquia dos elementos da máquina o mecânico sabe que a buzina é alimentada exclusivamente pela eletricidade fornecida pela bateria, ele poderá logicamente deduzir que, se a bateria se esgotar, a buzina não funcionará. É o raciocínio dedutivo. (...)" [PIR84] (pgs. 102 e 103).

Relativamente à formalização computacional do Raciocínio Indutivo, Fischler e Firschein [FIS87] apresentam como alternativa o Raciocínio Probabilístico, mais especificamente o formalismo Bayesiano e de Dempster-Shafer. Analogamente ao Raciocínio Dedutivo, o Raciocínio Probabilístico apresenta diferentes formalizações, dependentes do conceito de probabilidade a que se está se referindo. Fischler e Firschein [FIS87] relacionam os diferentes conceitos que os pesquisadores têm apresentado para a Probabilidade :

1. Medida da frequência de ocorrência de um evento.
2. Disposição de eventos (ou de um evento) a ocorrer. Por exemplo: "qualquer um que olhar para este carro concorda que existe pouca probabilidade de ele realizar uma viagem de 1000 Km".
3. A crença subjetiva que uma pessoa tem sobre as chances de ocorrências de diferentes eventos.
4. A relação lógica entre evidências e hipóteses relevantes. Por exemplo : "se o paciente tem febre e o teste de *glypus* é positivo, então é provável que ele tenha síndrome de Hendrix".

A definição clara de qual dos conceitos precedentes está se considerando na formalização do problema é essencial na

caracterização da adequabilidade da técnica utilizada. Determinados problemas são claramente modeláveis pelo conceito tradicional da Probabilidade (conceito 1), dadas as características frequenciais dos eventos, enquanto outros são analisados pelos especialistas sob uma ótica subjetiva.

No capítulo III (item 3.6), apresenta-se uma discussão mais detalhada das principais diferenças entre estes dois conceitos de probabilidade, bem como os problemas mais comuns presentes nas estimativas subjetivas do ser humano, relativamente aos modelos probabilísticos.

### 2.2.3. Raciocínio Analógico

No Raciocínio Analógico tenta-se traçar uma correspondência entre os elementos e o funcionamento de dois sistemas distintos. Enquanto um dos sistemas é bem entendido, o outro é o que se deseja conhecer ou responder determinadas perguntas a ele afetas. Um exemplo de Raciocínio Analógico é usar o conhecimento e intuição sobre a Mecânica dos Fluidos para raciocinar sobre o fluxo de corrente elétrica [FIS87].

Fischler e Firschein [FIS87] afirmam que o maior problema no Raciocínio Analógico é encontrar uma correspondência entre os sistemas conhecido e desconhecido. Os autores exemplificam com uma analogia entre a bateria elétrica e o reservatório. Nesta analogia, não é o tamanho, forma, cor ou substância da bateria que são relevantes, mas sim a energia potencial estocada e a energia liberada para providenciar a força. Desta forma, somente analogias envolvendo armazenagem e liberação de energia podem ser proveitosas neste esquema comparativo.

O Raciocínio Analógico assume relevância principalmente quando se considera o formalismo dos diferentes tipos de raciocínio. Independentemente do mecanismo de raciocínio, formalizá-lo é converter algum problema dado na sua forma

correspondente. Esta conversão caracteriza um problema em Raciocínio Analógico, para o qual a solução ainda é ignorada [FIS87].

### 2.3. TIPOS DE IMPRECISÃO

Nesta seção, aborda-se os diferentes tipos de imprecisão presentes no Raciocínio Humano e que são relevantes na elaboração de Sistemas Especialistas. O objetivo consiste em caracterizar as diversas situações possíveis e verificar a adequabilidade das principais técnicas a cada uma das situações.

#### 2.3.1. Incerteza ou Imprecisão ?

Alguns trabalhos na bibliografia especializada (e.g. [DUT85], [BAS86], [LEU88], [LEU89]) costumam diferenciar os diferentes tipos possíveis de imprecisão. Segundo estes, do ponto de vista formal, o termo genérico mais adequado não é *incerteza*, mas sim *imprecisão*<sup>2</sup>. A imprecisão, por sua vez, pode ser caracterizada em três formas distintas : *incerteza*, *difusão* e *ignorância*. A diferenciação destes dois tipos de imprecisão é relevante no seu tratamento e representação, uma vez que a adequabilidade das diferentes técnicas depende do tipo de imprecisão a que se direccionam [BUX89].

#### 2.3.2. Incerteza

Este tipo de imprecisão ocorre quando a relação causa-efeito de uma regra formulada por um especialista não constitui um evento certo. Em outras palavras, o especialista não pode afirmar com absoluta certeza que a regra em questão ocorre

---

<sup>2</sup> Na bibliografia, frequentemente a imprecisão em Sistemas Especialistas é referenciada de forma genérica, através da utilização do termo "Incerteza" (Uncertainty), ao invés de "Imprecisão". A fim de evitar confusões, neste trabalho, o termo genérico utilizado é "Imprecisão". A "Incerteza" constitui um dos tipos possíveis de "Imprecisão".



invariavelmente.

exemplo : o problema do pedal do freio estar baixo ou ir todo ao fundo tem como causas :

- 1) as lonas do freio estão fatigadas (FC = 0.8)
- 2) o líquido do freio está com o nível baixo (FC = 0.6)
- 3) o cilindro está defeituoso (FC = 0.5)

obs. : a) Na regra anterior, FC significa "Fator de Certeza".

- b) experiências indicam que a primeira é mais freqüente do que a última, indicando uma abordagem freqüencial no Tratamento da Incerteza.

A incerteza é tipicamente tratada por uma abordagem numérica, baseada em probabilidades, quer seja na forma subjetiva ou na forma tradicional (baseada em experimentos de freqüência).

### 2.3.3. Difusão

A *Difusão* ocorre quando as informações são descritas qualitativamente. Nestes casos, a imprecisão está relacionada ao grau de pertinência de objetos a categorias de classificação (*alto, quente, aproximado, etc*). O tratamento da linguagem natural pressupõe o entendimento destes conceitos comumente utilizados pelos seres humanos, mas de entendimento complexo por parte de sistemas computacionais.

exemplo : a transação é "realizável" se :

- 1) o cliente tem "alta" taxa de crédito.
- 2) os registros do cliente em transações recentes são "bons".
- 3) o contato recente c/ cliente sobre esta transação é "positivo".

obs : termos entre " " são caracterizados por graus de pertinência

A principal abordagem dada para este tipo de imprecisão é a *Teoria Possibilística*, fundamentada na *Teoria dos Conjuntos Difusos*. Cabe salientar que os pesquisadores desta técnica proclamam que a Teoria Possibilística pode tratar tanto o difuso

quanto o incerto.

#### 2.3.4. Incerteza e Difusão

Em determinadas situações, estes dois tipos de imprecisão podem ocorrer simultaneamente em sistemas especialistas.

exemplo : 1) FATO as Taxas do Mercado estão Altas (0.6)  
2) SE as Taxas do Mercado estão Altas,  
ENTÃO aplicar capital (0.8)

Neste caso, há tanto a incerteza (na forma de graus de crença associados à proposição e à regra) e a difusão (no termo "Altas").

Além deste caso, podem ocorrer também situações em que a incerteza pode ser difusa.

exemplo : A Lucratividade está Alta (por volta de 0.7).

#### 2.3.5. Ignorância

Neste trabalho, denomina-se *ignorância* à ausência de avaliações da imprecisão associada ao conhecimento no sistema ou em informações surgidas durante o processo de inferência (evidência) (e.g. "Não sei nada sobre a inflação do próximo mês").

#### 2.4. ORIGENS DE IMPRECISÃO EM SISTEMAS ESPECIALISTAS

Dentre as publicações que abordam as origens e diferentes tipos de imprecisão, destacam-se os trabalhos de Bonissone ([BON85] e [BON87]). Nestes, um levantamento do estado da arte em Tratamento de Imprecisão pressupõe uma classificação das origens da mesma, propiciando uma melhor definição sobre as situações mais adequadas às diferentes técnicas. A classificação apresentada caracterizou as seguintes quatro principais fontes de imprecisão :

- Confiabilidade da informação.

- Imprecisão inerente à linguagem de representação das regras.
- Inferência baseada em informação incompleta.
- Agregação de informação de múltiplas origens.

A seguir explicita-se cada um destes pontos.

#### 2.4.1. Confiabilidade da Informação

Neste contexto, considerando que a informação pode ser colhida por instrumentos e representada em conhecimento factual, ou seja, num conjunto de asserções ou fatos, surgem duas situações em que pode se originar a imprecisão :

- os instrumentos utilizados nas observações podem ser pouco confiáveis. Bonissone [BON87] denomina esta situação de "Aleatoriedade" ("*Randomness*"). Henkind e Harrison [HEN89] exemplificam com a medida de erro de um instrumento ("a leitura está correta dentro de mais ou menos cinco por cento").
- os conceitos presentes nas observações podem ser mal-definidos caracterizando uma "Difusão".
- a imprecisão pode surgir na base de conhecimento, oriunda de regras cuja implicação não constitui um evento certo. É o caso típico de incerteza, onde o especialista não pôde caracterizar uma forte correlação entre premissas e conclusão. Henkind e Harrison [HEN88] ilustram com a seguinte situação : ao ver John dirigindo um Rolls Royce, poder-se-ia concluir que John é rico. Contudo, não há uma implicação segura entre os eventos, pois John pode ter emprestado o automóvel ou mesmo ser um chofer.

Há diferenças nas imprecisões presentes nestas situações. A Aleatoriedade considera a incerteza de um dado elemento pertencer a um conjunto bem definido (evento). A Difusão relaciona-se com a incerteza oriunda da pertinência parcial de um dado elemento a um conjunto cujos limites não são rigidamente definidos [BON87]. No terceiro caso, a imprecisão está na implicação e pode ser caracterizada nos termos usados pelo perito ao descrever a regra (e.g. "Na maioria das vezes...", "Quase sempre...", etc).

Segundo Bonissone [BON87], na maioria dos Sistemas

Especialistas o grau de implicação entre premissas e conclusão é artificialmente expresso como um valor escalar em um intervalo (Fator de Certeza, Probabilidade etc.). Tal valor representa a troca da implicação estrita " $\forall x, A(x) \rightarrow B(x)$ " para uma afirmação menos restritiva: "para a maioria dos  $x$ " ou "geralmente para todo  $x$ ", " $A(x) \rightarrow B(x)$ ". Esta modelagem menos restritiva origina uma série de questões que devem ser consideradas pelo projetista do Sistema Especialista. Bonissone e Tong [BON85] sintetizam estas questões apresentando o seguinte exemplo genérico:

Suponha que  $\{X \text{ é } A\}$  com grau de confiança  $x_1$ . Se a base de conhecimento do S.E. contém a regra:

$$\{ (X \text{ é } A) \rightarrow (Y \text{ é } B) \text{ com grau de confiança } r_1 \}$$

então, deve-se ser capaz de determinar  $y_1$ , o grau de confiança associado à conclusão  $\{Y \text{ é } B\}$ . O valor de  $y_1$  deve ser uma função de ambos,  $x_1$  e  $r_1$ , por exemplo,  $G(x_1, y_1)$ . Bonissone e Tong [BON85] colocam as seguintes questões:

- i. Como extrair do especialista valores consistentes de  $r_1$ ?
- ii. Como computar ou obter de outro modo o valor de  $x_1$ ?
- iii. Quais são as formas pelas quais  $r_1$  e  $x_1$  deveriam ser representados: um escalar, um intervalo, uma distribuição, uma expressão lingüística? Eles são definidos em escala absoluta ou relativa?
- iv. No caso mais geral, quando a premissa é composta de múltiplas cláusulas, como agregar o grau de certeza dos fatos representados pelas cláusulas nas premissas? Em outros termos, qual é a função  $T(x_1, \dots, x_n)$  que determina  $x_p$ , o grau de certeza da premissa?
- v. Como definir a função  $G(x_p, r_1)$  que agrega os graus de confiança da premissa com a da regra?
- vi. Se múltiplas regras determinam a mesma conclusão com diferentes graus de certeza  $y_1, \dots, y_m$ , qual a função  $S(y_1, \dots, y_m)$  que determina o grau de certeza final da conclusão?

Ao construir Sistemas Especialistas, os engenheiros de conhecimento, na maioria das vezes, defrontam-se com estas questões. Os fatos devem ser agregados para determinar se a premissa de uma dada regra foi satisfeita, para verificar o grau com que restrições externas foram cumpridas, para propagar o total de incerteza através do disparo de uma regra e para a consolidação da medida final de certeza de uma mesma conclusão derivada de diferentes regras.

#### 2.4.2. A Linguagem de Representação das Regras

Sistemas Especialistas possuem imprecisões inerentemente associadas à linguagem de representação das regras. Se as regras não são expressas em linguagem formal, seu significado não pode ser exatamente interpretado [BON85].

Em outros termos, a imprecisão inerente à linguagem surge da forma como o especialista expressa seu conhecimento, ou seja, através da linguagem natural. O tratamento deste tipo de imprecisão pressupõe a possibilidade de que, mesmo com o cobrimento parcial da premissa em determinada regra, as inferências no Sistema ainda sejam permissíveis. Por exemplo, o perito pode ter expresso a seguinte regra : "Se a temperatura estiver alta, então desligar o equipamento". Em determinado ponto da inferência, o sistema pode encontrar o seguinte fato "Temperatura = 150°C". Está caracterizado um cobrimento parcial na premissa da regra anterior (dado pelo quanto 150°C é alto). Espera-se do sistema a capacidade de continuar a inferência, apesar deste fato.

Zadeh (e.g. [ZAD75] e [ZAD83b]) aborda o problema pela *Teoria do Raciocínio Aproximado* que, sob imprecisão nos fatos e descrições das regras, permite inferências baseadas em um "Modus Ponens" generalizado. Em outras palavras, a partir da premissa "X é A", pode-se utilizar um mecanismo que considere todas as situações em que os fatos são difusos ("X é A\*").

#### 2.4.3. O Caráter Incompleto da Informação

O terceiro tipo de imprecisão ocorre quando a informação não é completa. O desejável, neste caso, é que se possa continuar a inferência mesmo em casos onde a premissa de uma regra assuma o valor "desconhecido". Deve-se distinguir "evidência necessária" e "evidência possível" e tratá-las apropriadamente no processo de inferência [BON85].

Algumas abordagens têm sido propostas para este tipo de imprecisão. Reiter [REI80] propõe o Raciocínio *Default*, a partir de hipóteses de consistência. Doyle [DOY83] apresenta a alternativa de tratamento não-numérico através de hipóteses de raciocínio.

#### 2.4.4. Agregação de Informações de Múltiplas Origens

A quarta situação onde se pode evidenciar imprecisão surge quando as regras expressas no sistema devem ser retiradas de diferentes fontes de conhecimento ou diferentes especialistas. Bonissone e Tong [BON85] relacionam os seguintes problemas que podem surgir quando o conhecimento é representado na forma de regras de produção :

##### 2.4.4.a. Regras Conflitantes

Sob circunstâncias idênticas, as regras chegam a conclusões contraditórias, gerando inconsistências que aumentam o nível de imprecisão.

##### 2.4.4.b. Regras Redundantes

Sob circunstâncias idênticas, as regras chegam às mesmas conclusões. Isto pode gerar um acesso exacerbado às medidas de certeza das conclusões, aumentando a complexidade computacional.

##### 2.4.4.c. Regras Sub-entendidas

É o caso em que a premissa de uma regra é um subconjunto de outra. Em determinadas circunstâncias, podem ocorrer medidas de certeza super-estimadas.

#### 2.4.4.d. Regras Perdidas

São regras que falham em determinar a conclusão, em certas circunstâncias, gerando a imprecisão na inferência sob a forma de informação incompleta.

Bonissone e Tong [BON85] propõem a verificação da inferência do sistema através da representação das regras na forma de rede, a fim de detectar estas inconsistências. Ao se analisar a rede, é possível verificar nós não-pesquisados (informação não-utilizada e perdida), sub-estruturas comuns, compartilhadas por duas ou mais estruturas (sub-entendimento ou redundância potenciais). Neste esquema também seriam constatáveis, em tempo de processamento, a existência de estados conflitantes (contradições) e potencialmente pesquisáveis [BON85].

## CAPÍTULO III A ABORDAGEM BAYESIANA

### 3.1. INTRODUÇÃO

A Teoria da Probabilidade tem sido estudada e aplicada nos mais variados campos científicos, desde o século XVII. A partir dos anos 70, quando os pesquisadores da IA defrontaram-se com a questão do Tratamento de Incerteza em Sistemas Especialistas, a Inteligência Artificial passou a integrar estes domínios de aplicação.

### 3.2. FUNDAMENTOS DA ABORDAGEM BAYESIANA

Uma das principais medidas de incerteza em Estatística é a Probabilidade Bayesiana<sup>3</sup>, também chamada de chance ou frequência. Para que uma medida de incerteza (ou crença) possa ser caracterizada como uma *Probabilidade Bayesiana*, algumas propriedades são necessárias. Uma das principais é a *Aditividade* apresentada a seguir ([ISH82]) :

Dados  $h_1$  e  $h_2$  subconjuntos de um conjunto universo  $U$ , sendo que  $h_1 \cap h_2 = \emptyset$  (intersecção vazia), a Probabilidade Bayesiana  $P$  deve satisfazer as seguintes relações :

- a)  $0 \leq P(h_i) \leq 1$  p/  $h_i \in U$
- b)  $P(-h_i) = 1 - P(h_i)$ , onde  $-h_i$  denota a negação de  $A$ .
- c)  $P(h_1 \cup h_2) = P(h_1) + P(h_2)$
- d)  $P(U) = 1$ .

Expressão (3-0) : RELAÇÕES DA PROBABILIDADE BAYESIANA

---

<sup>3</sup> Os diferentes conceitos de Probabilidade estão comentados no Capítulo II (item 2.2.2).

<sup>4</sup>  $h_1$  e  $h_2$  são chamados "condicionalmente independentes", ou "incompatíveis" ([PEA87]).



Pode-se supor uma situação em que a ocorrência de uma hipótese (evento)  $h$  possua relação com a ocorrência de uma evidência  $e$ . A *Probabilidade Condicional*,  $P(h/e)$ , é justamente a probabilidade de uma hipótese  $h$ , dado que se conhece a ocorrência da evidência  $e$ . A figura 3-1 apresenta interessante ilustração encontrada no trabalho de Fischler e Firschein [FIS87] que permite visualizar a Regra ou Teorema de Bayes.

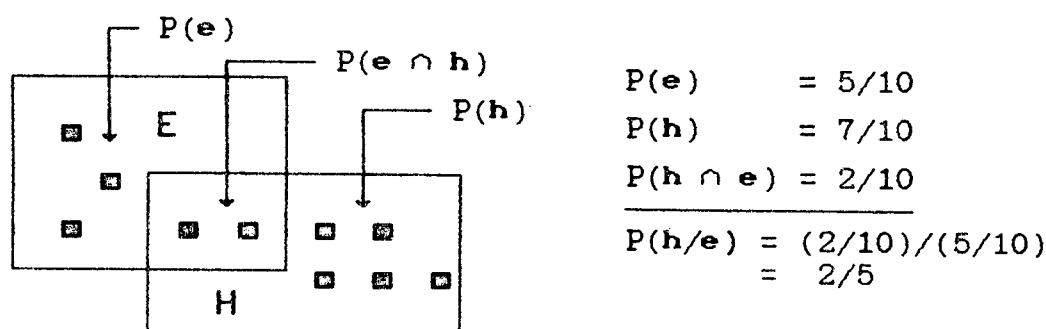


FIGURA 3-1 : Representação do Teorema de Bayes.

O Teorema de Bayes expressa a probabilidade condicional  $P(h/e)$  por :

$$P(h/e) = \frac{P(e \cap h)}{P(e)} = \frac{P(e/h)P(h)}{P(e)}$$

Expressão (3-1) : TEOREMA DE BAYES

O Teorema de Bayes constitui o mecanismo segundo o qual a medida de certeza de determinada hipótese  $h$  é atualizada quando determinada evidência  $e$ , condicionalmente dependente de  $h$ , é validada. Este princípio foi utilizado em Sistemas Especialistas a fim de atualizar as medidas de crença presentes nas regras, durante o processo de inferência do sistema. A seguir, aborda-se este Tratamento Probabilístico presente em Sistemas Especialistas Bayesianos.

## 3.3. A ABORDAGEM BAYESIANA EM SISTEMAS ESPECIALISTAS

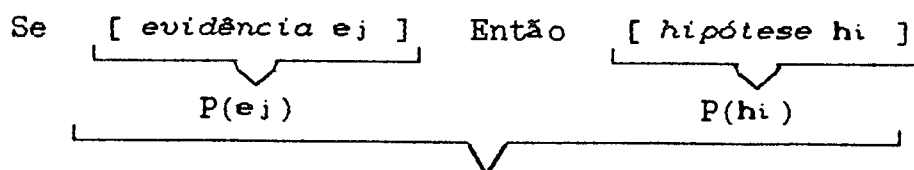
Uma das principais formas de se representar o conhecimento adquirido junto a especialistas é através das chamadas *Regras de Produção* ([WAT78], [DAV77]). As regras de produção assumem o seguinte formato :

*Se Premissa Então Conclusão.*

Na Abordagem Bayesiana, a premissa é referida como *evidência* e a conclusão como *hipótese*. Note-se que as hipóteses em uma regra podem tornar-se evidência em outra. O encadeamento do processo de inferência, tomando-se a conclusão de uma regra como hipótese em outra que se deseja provar, caracteriza o *Raciocínio Bayesiano*.

Para se utilizar Métodos Probabilísticos no Tratamento de Incerteza em SE, é necessário obter um conjunto de *probabilidades a priori*, a fim de descrever a população (conjunto de hipóteses (ou evidências) que formam o conjunto universo). Quando surgem evidências relacionadas a determinadas hipóteses, há uma atualização nas probabilidades a priori das primeiras. O resultado é um conjunto de *probabilidades posteriores* [HEN88].

Colocado em termos da Inteligência Artificial, no Raciocínio Bayesiano, a implicação "Se e então h" é substituída por "Se e então h com probabilidade P". A probabilidade P surge da atualização da probabilidade *a priori* de h, através da aplicação do Teorema de Bayes. Pode-se esquematizar este processo de atualização das probabilidades da seguinte forma :



TEOREMA DE BAYES :

$$P(h_i/e_j) = \frac{P(e_j \cap h_i)}{P(e_j)} = \frac{P(e_j/h_i) \cdot P(h_i)}{P(e_j)}$$

Como exemplo pode-se tomar as seguintes regras :

R1: "SE o pedal do freio está baixo ( $P(e_1)$ ),  
ENTÃO as lonas estão fatigadas  $P(h_1)$ ".

R2: "SE o pedal do freio está baixo ( $P(e_1)$ ),  
ENTÃO o líquido está abaixo do nível  $P(h_2)$ ".

Para cada caso, uma vez conhecidas as probabilidades a priori  $P(e_1)$ ,  $P(h_1)$  e  $P(h_2)$ , através do Teorema de Bayes pode-se determinar as probabilidades posteriores das hipóteses  $h_1$  e  $h_2$ , dado que se verificou a ocorrência de  $e_1$ . Explicitamente :

$$P(h_1/e_1) = P(e_1/h_1) \cdot P(h_2)/P(e_1)$$

### 3.3.1. A Formulação Geral do Teorema de Bayes

Pode-se generalizar a Regra de Bayes, formando uma função de combinação de probabilidades quando mais do que uma evidência está relacionada à comprovação de uma hipótese. Por exemplo, considerando-se a regra R1 acima, a verificação de uma nova evidência  $e_2$  (e.g.  $e_2$  = "o carro demora a freiar") provocaria a atualização da hipótese  $h_1$  por :

$$\begin{aligned} P(h_1/e_1 \& e_2) &= P(h_1 \& e_1 \& e_2) / P(e_1 \& e_2) \\ &= \frac{P(h_1) \cdot P(e_1/h_1) \cdot P(e_2/h_1, e_1)}{P(e_1) \cdot P(e_2/e_1)} \end{aligned}$$

No caso geral, tem-se um conjunto de hipóteses  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$  e um conjunto  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  de evidências parciais. O resultado é a Probabilidade Posterior (atualizada) de uma determinada hipótese  $h_i$ , dada a ocorrência de  $m$  evidências  $e_j$ . Explicitamente :

$$P(h_i/e_1, e_1, \dots, e_m) = \frac{P(h_i) \cdot P(e_1/h_i) \cdot \dots \cdot P(e_m/h_i, e_1, e_2, \dots, e_{m-1})}{P(e_1) \cdot P(e_2/e_1) \cdot \dots \cdot P(e_m/e_1, e_2, \dots, e_{m-1})}$$

Esta expressão apresenta o inconveniente de necessitar de todas as probabilidades condicionais, praticamente impossíveis de se obter se dependerem das estimativas de especialistas. Além disso, a complexidade computacional é elevada e pode causar problemas. Assim, tem-se assumido as seguintes hipóteses simplificatórias na Abordagem Bayesiana :

- a) As hipóteses são mutuamente exclusivas e o conjunto H de todas as hipóteses é exaustivo, ou seja :

$$\begin{aligned} i) & P(h_i, h_j) = 0 \text{ para } i \neq j. \\ ii) & \sum_{j=1, n} P(h_i) = 1. \end{aligned}$$

Expressão (3-2) : EXAUSTIVIDADE E MÚTUA EXCLUSIVIDADE ENTRE OS  $h_i$ .

- b) As evidências no conjunto E são condicionalmente independentes sob cada hipótese  $h_i$ , o que caracteriza a seguinte expressão:

$$i) P(e_1, e_2, \dots, e_m / h_i) = \prod_{j=1, m} P(e_j / h_i)$$

Expressão (3-3) : INDEPENDÊNCIA CONDICIONAL ENTRE OS  $e_j$  SOB  $h_i$ .

A partir destas hipóteses, chega-se a uma expressão genérica para o Teorema de Bayes. Seguindo o desenvolvimento de Ishizuka *et al.* [ISH82], esta função de combinação genérica é obtida partindo-se do caso em que se combina duas evidências parciais  $e_1$  e  $e_2$  para a atualização da probabilidade de uma hipótese  $h_j$ .

Supõe-se que  $P(h_i / e_1)$  e  $P(h_i / e_2)$  são as Probabilidades Bayesianas Condicionais de uma hipótese  $h_i$ , dadas as evidências mutuamente independentes  $e_1$  e  $e_2$ . O Teorema de Bayes fornece :

$$(3-4) \quad P(h_i / e_1) = P(e_1 / h_i) \cdot P(h_i) / P(e_1)$$

$$(3-5) \quad P(h_i / e_2) = P(e_2 / h_i) \cdot P(h_i) / P(e_2)$$

onde  $P(h_i)$ ,  $P(e_1)$  e  $P(e_2)$  são as probabilidades a priori. Devido à independência condicional entre as evidências sob a hipótese  $h_i$  (expressão 3-3), tem-se :

$$(3-6) \quad P(e_1, e_2 / h_i) = P(e_1 / h_i) \cdot P(e_2 / h_i)$$

Cabe salientar que a independência condicional entre as evidências  $e_1$  e  $e_2$  sob a hipótese  $h_i$  não implica necessariamente que a probabilidade conjunta  $P(e_1 \cap e_2)$  seja o produto das probabilidades a priori  $P(e_1)$  e  $P(e_2)$  [ISH82].

A partir das expressões (3-4), (3-5) e (3-6) anteriores, pode-se calcular a probabilidade combinada, tomando-se, para tal, o Teorema de Bayes. Assim :

$$\begin{aligned} P(h_i / e_1, e_2) &= \frac{P(e_1, e_2 / h_i) \cdot P(h_i)}{P(e_1, e_2)} \\ &= \frac{P(e_1 / h_i) \cdot P(e_2 / h_i) \cdot P(h_i)}{P(e_1, e_2)} \\ &= \frac{\frac{P(h_i / e_1) \cdot P(e_1)}{P(h_i)} \cdot \frac{P(h_i / e_2) \cdot P(e_2)}{P(h_i)} \cdot P(h_i)}{P(e_1, e_2)} \end{aligned}$$

Resultando na seguinte expressão :

$$(3-7) \quad P(h_i / e_1, e_2) = \frac{P(h_i / e_1) \cdot P(h_i / e_2)}{P(h_i)} \cdot \frac{P(e_1) \cdot P(e_2)}{P(e_1, e_2)}$$

onde o termo  $P(e_1) \cdot P(e_2) / P(e_1, e_2)$  é uma constante associada aos estados das evidências  $e_1$  e  $e_2$ , independentemente da hipótese  $h_i$  considerada.

Pela suposição de que todas hipóteses  $h_i$  são mutuamente exclusivas e exaustivas e pela necessidade da normalização das probabilidades, tem-se a seguinte função de combinação :

$$(3-8) \quad P(h_i / e_1, e_2) = \frac{P(h_i / e_1) \cdot P(h_i / e_2) / P(h_i)}{\sum_{i=1, n} \frac{P(h_i / e_1) \cdot P(h_i / e_2)}{P(h_i)}}$$

Para o caso genérico de  $m$  evidências,  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , a função de combinação resultante será [BON87] :

$$P(h_i/e_1, e_2, \dots, e_m) = \frac{P(e_1, e_2, \dots, e_m/h_i) \cdot P(h_i)}{\sum_i P(e_1, e_2, \dots, e_m/h_i) \cdot P(h_i)}$$

Expressão (3-9) : REGRA DE BAYES PARA O CASO GERAL DE  $n$  HIPÓTESES E  $m$  EVIDÊNCIAS.

### 3.3.2. A Complexidade Computacional no Raciocínio Bayesiano

Uma das principais questões que têm limitado a utilização do Raciocínio Bayesiano em Sistemas Especialistas é sua complexidade computacional. Henkind e Harrison [HEN88] apresentam uma ilustração onde é possível identificar os principais problemas de ordem computacional existentes na Abordagem Bayesiana.

Inicialmente, Henkind e Harrison [HEN88] assumem a existência de uma única hipótese  $h_1$ . A partição do espaço amostral exigida na Regra de Bayes faz com que se deva assumir uma segunda hipótese, qual seja a não ocorrência da hipótese  $h_1$  ( $-h_1$ ), denominada  $h_2$ . A Regra de Bayes (sem as hipóteses de independência condicional entre as evidências) neste caso seria :

$$(3-10) \quad P(h_i/e_j) = \frac{P(h_i) \cdot P(e_j/h_i)}{\sum_{i=1,2} P(h_i) \cdot P(e_j/h_i)}$$

Em uma situação particular, dado a evidência  $e_j$ , deve-se conhecer os valores das probabilidades a priori  $P(h_1)$ ,  $P(h_2)$  e das probabilidades condicionais  $P(e_j/h_1)$  e  $P(e_j/h_2)$  e, em seguida, aplicar (3-10) a fim de determinar as probabilidades  $P(h_i/e_j)$  (para  $i = 1 \text{ e } 2$ ).

Caso se suponha a existência de  $2^m$  evidências parciais  $e_j$ , existirão  $2^m$  probabilidades  $P(e_j/h_1)$  e  $2^m$  probabilidades  $P(e_j/h_2)$ . Assim, para se obter a probabilidade no primeiro membro de 3-10, dado determinado  $e_k$  arbitrário, necessita-se determinar a

probabilidade  $P(h_1)$  + a probabilidade  $P(h_2)$  + as probabilidades  $P(e_j/h_1)$  + as probabilidades  $P(e_j/h_2)$ , o que totaliza  $2 \cdot (1+2^m)$  estimativas probabilísticas na análise inicial. Mesmo no caso simples de duas hipóteses, a complexidade é de  $O(2^m)$ . Quando se assume o tempo requerido para tomar cada probabilidade como fixo, a complexidade em termos temporais é uma constante [HEN88].

No caso geral, quando se assume a existência de  $n$  hipóteses  $h_i$ , o número de probabilidades requeridas é de  $n \cdot (1+2^m)$  levando a uma complexidade de  $O(n \cdot 2^m)$ . Com o tempo requerido para os levantamentos probabilísticos sendo fixo, a complexidade em termos temporais é de  $O(m)$  [HEN88].

Henkind e Harrison [HEN88] comentam o caso ainda mais geral, em que se descarta a hipótese de mútua independência (disjunção) entre as hipóteses  $h_i$ . Neste caso, deve-se computar o valor da probabilidade  $P(h'/e_j)$ , onde  $h'$  é uma hipótese complexa (conjunção de zero ou mais hipóteses). Se existirem  $n$  hipóteses, existirão  $2^n$  hipóteses complexas (no pior caso), levando a  $2^n(1 + 2^m)$  probabilidades, ou seja, a uma complexidade de  $O(2^{n+m})$  em número de operações e de  $O(2^n)$  em termos temporais, assumindo-se o tempo de avaliações de probabilidades como fixo [HEN88].

As complexidades de acesso à informação e de tempo anteriormente deduzidas estão relacionadas à Regra Geral de Bayes, sem as hipóteses que a simplificaram para a expressão 3-9. Em realidade, a principal razão para se supor a independência condicional entre as evidências e a mútua exclusividade entre as hipóteses (disjunção) é reduzir a complexidade do Raciocínio Bayesiano ([BAS86], [HEN88]).

Henkind e Harrison [HEN88] apresentam a complexidade quando se considera as hipóteses simplificatórias na Regra de Bayes. Para o caso da mútua exclusividade ou disjunção entre as hipóteses, há uma redução no termo  $2^n$  para  $n$ , reduzindo o valor de  $2^n(1 + 2^m)$  para  $n(1 + 2^m)$ . No caso da independência condicional

entre as evidências, há uma redução no termo  $2^m$  (número de probabilidades condicionais  $P(e_j/h_k)$ ) para  $m$ , reduzindo o termo  $n(1 + 2^m)$  para  $n(1 + m)$ . Portanto, assumir estas duas hipóteses simplificatórias na Regra de Bayes proporciona uma redução da complexidade de informação de  $O(2^{n+m})$  para  $O(n.m)$  [HEN88].

Devido ao grande número de avaliações probabilísticas necessárias [BON87], a utilização do Raciocínio Bayesiano em Sistemas Especialistas parece ser mais promissora quando o problema puder ser representado como uma Rede Bayesiana esparsa formada por uma hierarquia de pequenos conjuntos de nós. Assim, pode-se conhecer a dependência entre as variáveis (nós da rede), devendo-se explicitar somente as probabilidades condicionais [PEA85].

### 3.4. A ABORDAGEM BAYESIANA MODIFICADA

Em 1974, iniciaram-se os trabalhos com o objetivo de construir um dos mais conhecidos Sistemas Especialistas, o PROSPECTOR. Sua finalidade principal é a de auxiliar os geologistas na busca por novos depósitos de minérios. Os trabalhos em PROSPECTOR terminaram em 1983 [WAT86]. Especificamente no que se refere ao Tratamento da Incerteza presente nas regras propostas pelos geologistas, a contribuição principal dos colaboradores em PROSPECTOR (notadamente Richard Duda) foi simplificar as formulações da Regra de Bayes e dar início à busca por novos e plausíveis tratamentos probabilísticos em IA.

Além das suposições da mútua exclusividade entre as hipóteses, exuastividade do conjunto de hipóteses e da independência condicional entre as evidências sob cada hipótese, a abordagem utilizada em PROSPECTOR pressupõe a independência condicional entre as evidências sob a negação de cada hipótese, ou seja :

$$(3-11) \quad P(e_1, e_2, \dots, e_m / \neg h_i) = \prod_{j=1, m} P(e_j / \neg h_i)$$



A abordagem Bayesiana Modificada está fundamentada em uma variação da Regra de Bayes que se faz quando a hipótese anterior é assumida. Pode-se explicitar esta variação a partir dos resultados apresentados por Pearl [PEA87] para uma evidência  $e$  e uma hipótese  $h$  :

Parte-se do Teorema de Bayes :  $P(h/e) = \frac{P(e/h) \cdot P(h)}{P(e)}$  ,

dividindo-se a equação anterior pela expressão complementar  $P(-h/e)$  tem-se :

$$\begin{aligned} \frac{P(h/e)}{P(-h/e)} &= \frac{P(e/h) \cdot P(h)}{P(e) \cdot P(-h/e)} \\ &= \frac{P(e/h) \cdot P(h)}{P(-h \& e)} \\ &= \frac{P(e/h) \cdot P(h)}{P(e/-h) \cdot P(-h)} \end{aligned}$$

Resultando em :

$$(3-12) \quad \frac{P(h/e)}{P(-h/e)} = \frac{P(e/h)}{P(e/-h)} \cdot \frac{P(h)}{P(-h)}$$

Nesta expressão, surgem duas importantes relações através das quais as atualizações probabilísticas são realizadas. A primeira é a *chance (Odds) posterior*,  $O$  :

$$O(h) = \frac{P(h)}{P(-h)}$$

Expressão (3-13) : CHANCE POSTERIOR

e a segunda é a *razão probabilística*,  $L$  :

$$L(e/h) = \frac{P(e/h)}{P(e/-h)}$$

Expressão (3-14) : RAZÃO PROBABILÍSTICA

Assim, a razão  $P(h/e)/P(-h/e)$ , ou  $O(h/e)$ , é dada pelo produto :

(3-15)

$$O(h/e) = L(e/h).O(h)$$

Mais especificamente, esta relação significa dizer que a extensão total da crença em uma hipótese  $h$ , baseada tanto em um conhecimento prévio (na forma de  $P(h)$ ) como em determinada evidência  $e$ , é, na Regra de Bayes, dada pelo produto de dois fatores : a chance a priori de  $h$ ,  $O(h)$ , e a razão probabilística  $L(e/h)$ . O primeiro mede o apoio causal ou esperado em  $h$ , baseando-se apenas em um conhecimento advindo da experiência, enquanto o segundo representa o apoio diagnóstico ou esperado em  $h$  pela evidência observada. [PEA87].

A seguir, apresenta-se um exemplo que ilustra o mecanismo de atualização das crenças segundo tais expressões.

#### Exemplo 3-1 - [PEA87]

Em determinada noite, alguém está caminhando em direção ao som estridente de um sistema de alarme contra ladrão. Qual poderia ser a crença desta pessoa de que estivesse havendo uma tentativa de roubo? Para ilustrar os propósitos, toma-se os seguintes julgamentos: (a) Existe 95% de chance de que uma tentativa de roubo dispare o alarme,  $P(\text{alarme/roubo}) = 0.95$ .; (b) há pouquíssima chance (0.01) que o alarme dispare devido a outro mecanismo que não um roubo, ou seja,  $P(\text{alarme/não roubo}) = 0.01$ ; (c) amostras de crimes anteriores indicam que há 1 em 10000 chances que uma casa seja roubada em uma noite qualquer, isto é,  $P(\text{roubo}) = 10^{-4}$ .

Segundo os resultados anteriores :

$$O(\text{roubo/alarme}) = L(\text{alarme/roubo}).O(\text{roubo})$$

$$= \frac{0.95}{0.01} \cdot \frac{10^{-4}}{1-10^{-4}}$$

$$= 0.0095$$

A probabilidade surge da expressão<sup>5</sup> [PEA87]

<sup>5</sup> Da definição de  $O(A)$  tem-se :  $P(A) = O(A)$ ,  $P(-A) = O(A) \cdot (1-P(A))$   
 $P(A) = O(A) - O(A) \cdot P(A)$   
 resultando em :  $P(A) = O(A)/(1 + O(A))$

$$(3-16) \quad P(A) = \frac{O(A)}{(1 + O(A))}$$

então :  $P(\text{roubo}/\text{alarme}) = 0.0095/(1 + 0.0095) = 0.00941$ .

Verifica-se que o apoio esperado para a hipótese de roubo, dado pela evidência do disparo do alarme, aumenta o grau de crença de 1 em 10000 ( $P(\text{roubo})$ ) para 94.1 em 10000. Pearl [PEA87] salienta o fato de não ter sido necessário estimar os valores absolutos das probabilidades  $P(\text{alarme}/\text{roubo})$  e  $P(\text{alarme}/\text{não roubo})$  já que somente suas razões entraram no cálculo, fazendo com que somente uma estimativa direta destas razões devesse ser estimada.

### 3.4.1. A Combinação de Evidências

Pearl [PEA87] generaliza o exemplo anterior para o caso em que o sistema de alarme possui  $m$  detectores de tentativas de roubo, sensíveis a diferentes mecanismos físicos (e.g. turbulências no ar, variações de temperatura, pressão, som, etc.), cada qual produzindo um som distinto.

Pearl [PEA87] assume a hipótese  $h$  como sendo uma possível tentativa de roubo e  $e_j$  a evidência obtida do  $j$ -ésimo detector ( $c/$  eo sendo ausência de sinais). Assim, para cada sensor  $e_j$ , pode-se medir a confiabilidade (e sensibilidade) a partir das probabilidades  $P(\text{alarme}/\text{roubo})$  (igual a  $P(e_j/h)$ ) e  $P(\text{alarme}/\text{não roubo})$  (igual a  $P(e_j/-h)$ ), através da razão probabilística dada por :

$$(3-17) \quad L(e_j/h) = \frac{P(e_j/h)}{P(e_j/-h)}$$

No caso do sistema de alarme, pode-se supor uma situação em que alguns sensores disparam e outros não, caracterizando evidências conflitantes. Neste caso, a crença combinada para a hipótese  $h_k$  deveria ser computada pela expressão 3-15, resultando em :

$$(3-18) \quad O(h/e_1, e_2, \dots, e_m) = L(e_1, e_2, \dots, e_m/h) \cdot O(h)$$

A expressão 3-18 é computacionalmente inviável, devido

ao grande número de avaliações probabilísticas necessárias, relativas a qualquer subconjunto de evidências relacionados a  $h$  ou a  $-h$  [PEA87]. Entretanto, a adoção da hipótese de independência condicional entre as evidências sob cada hipótese  $h$  e  $-h$  simplifica consideravelmente a determinação de  $L(e_1, e_2, \dots, e_m/h)$ , como pode-se verificar a seguir.

Quando todas as evidências parciais estão validadas e assume-se a independência condicional entre as evidências sob  $h$  e  $-h$  (i.e. as expressões 3-3 e 3-11 são válidas), a formulação de Bayes define a *chance (Odds)* posterior como [BON87]:

$$O(h/e_1, \dots, e_m) = \frac{P(e_1/h)}{P(e_1/-h)} \dots \frac{P(e_m/h)}{P(e_m/-h)} \cdot \frac{P(h)}{P(-h)}$$

Resultando em :

$$(3-19) \quad O(h/e_1, \dots, e_m) = O(h) \cdot \prod_{j=1}^m L(e_j/h)$$

onde :

$L(e_j/h) = P(e_j/h)/P(e_j/-h)$  é a *razão probabilística (likelihood)* da evidência  $e_j$  para a hipótese  $h$

$O(h) = P(h)/P(-h)$  é a *Chande (Odds)* na hipótese  $h$ .

Há uma analogia para as formulações acima no caso em que as evidências parciais são certamente falsas [BON87] :

$$O(h/-e_1, \dots, -e_m) = \frac{P(-e_1/h)}{P(-e_1/-h)} \dots \frac{P(-e_m/h)}{P(-e_m/-h)} \cdot \frac{P(h)}{P(-h)}$$

Resultando em :

$$(3-20) \quad O(h/-e_1, \dots, -e_m) = O(h) \cdot \prod_{j=1}^m L(-e_j/h)$$

A razão probabilística  $L_{k,j}$  mede a suficiência de uma evidência parcial  $e_j$  para provar a hipótese  $h$ . Analogamente,  $L_{k,j}^*$  mede a *necessidade* de cada evidência parcial para provar uma dada hipótese [DUD76].

### 3.4.2. Múltiplas Hipóteses e Múltiplas Evidências

A independência condicional entre as evidências sob cada hipótese tem sua validade questionada quando o sistema de hipóteses não está corretamente representado. Considerando novamente o exemplo do sistema de alarmes, Pearl [PEA87] salienta que, se a falha de alguns sensores fosse causada por fatores externos (e.g. queda de energia), as hipóteses "roubo" e "não roubo" não seriam suficientes para garantir a independência entre os sensores. O que ocorre neste caso, é que o conjunto de hipóteses não está sendo exaustivo. Deve-se refazê-lo, a fim de que as hipóteses básicas da Regra Bayesiana de mútua exclusividade e exaustividade sejam preservadas.

Em resumo, na maioria das situações reais, o conjunto de universo é constituído de múltiplas evidências e hipóteses, fazendo com que algumas alterações tenham que ser assumidas nas expressões obtidas anteriormente para a atualização das crenças em cada hipótese.

#### Exemplo 3-2 - [PEA87]

A fim de ilustrar uma situação real, toma-se a seguir a generalização do exemplo 3-1 proposto por Pearl [PEA87]. Pearl propõe as seguintes hipóteses :

- $h_1$  = não roubo, equipamento em mal-funcionamento (-r,mf)
- $h_2$  = tentativa roubo, não há mal-funcionamento (r,-mf)
- $h_3$  = tentativa roubo combinada c/ mal-funcion. (r,mf)
- $h_4$  = não roubo, não há mal-funcionamento (-r,-mf)

Cada variável representando a evidência  $e_k$  também pode assumir vários valores. Por exemplo,  $e_{k1}$  = não há som,  $e_{k2}$  = há som baixo,  $e_{k3}$  = há som alto.

Para cada caso haverá uma ligação entre  $h$  e  $e_k$ , quantificada por uma matriz  $n \times m$ , sendo  $n$  e  $m$  o número de valores que  $h$  e  $e$  assumem, respectivamente. Cada célula nesta matriz é da forma :

(3-21)

$$M_{i,j} = P(e_{kj}/h_i)$$

Pearl [PEA87] apresenta a seguinte matriz para exemplificar a aferição probabilística :

	$e_{k1}$ (não há som)	$e_{k2}$ (há som baixo)	$e_{k3}$ (há som alto)
$h_1$	0.50	0.40	0.10
$h_2$	0.06	0.50	0.44
$h_3$	0.50	0.10	0.40
$h_4$	1.00	0.00	0.00

Dada a observação de um conjunto de evidências  $e_1, \dots, e_m$ , a crença total na  $i$ -ésima hipótese  $h_i$  é dada pelo Teorema de Bayes (exp. 3-1) [PEA87] :

$$(3-22) \quad P(h_i/e_1, \dots, e_m) = \alpha \cdot P(e_1, \dots, e_m/h_i) \cdot P(h_i)$$

onde  $\alpha = [P(e_1, \dots, e_m)]^{-1}$  é uma constante de normalização a ser computada a fim de que a equação 3-22 some a unidade (sobre  $i$ ).

A expressão 3-22 pode ser facilmente calculada quando se assume a independência condicional entre as evidências com respeito a cada hipótese  $h_i$ . Deste modo, 3-22 torna-se :

$$(3-23) \quad P(h_i/e_1, \dots, e_m) = \alpha \cdot P(h_i) \cdot \left\{ \prod_{k=1}^m P(e_k/h_i) \right\}$$

Assim, as células  $P(e_k/h_i)$  estão agora relacionadas à razão probabilística dada pela equação 3-19. Se, para cada detector de leitura  $e_k$ , o vetor de probabilidades for definido como [PEA87]:

$$(3-24) \quad \lambda_k = (\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{km})$$

$$(3-25) \quad \lambda_{ki} = P(e_k/h_i)$$

a Equação 3-23 pode ser computada por um simples produto vetorial. Inicialmente os vetores individuais de probabilidade são multiplicados juntos, termo a termo, para a forma de um vetor probabilístico  $\Lambda = \lambda_1 \dots \lambda_m$ , explicitamente :

$$(3-26) \quad \Lambda_i = \prod_{k=1}^m P(e_k/h_i)$$

Assim, o vetor da crença total  $P(h_i/e_1, \dots, e_m)$  é obtido pelo produto :

$$(3-27) \quad P(h_i/e_1, \dots, e_m) = \alpha \cdot P(h_i) \cdot \Lambda_i$$

similar à equação 3-19.

Pearl [PEA87] salienta a vantagem de que somente a magnitude relativa das probabilidades condicionais na equação 3-25 devem ser estimadas, ou seja, sua magnitude absoluta não afeta o resultado, já que  $\alpha$  é determinado pelo requerimento de que  $\sum P(h_i/e_1, \dots, e_m) = 1$ .

#### Exemplo 3-3 - [PEA87]

Considere-se novamente o sistema de alarmes do exemplo 1 e as hipóteses apresentadas no exemplo 2 com o seguinte conjunto de probabilidades  $H = \{0.099, 0.009, 0.001, 0.891\}$ . Além disso, assume-se que o detector 1 foi ouvido produzindo alto som, enquanto o detector 2 permaneceu em silêncio. Da equação 3-25, tem-se :

$$\lambda_1 = (0.1, 0.44, 0.4, 0) \text{ e } \lambda_2 = (0.5, 0.06, 0.5, 1) \\ \Lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = (0.05, 0.026, 0.2, 0)$$

resultando em :

$$P(h_i/e_1, e_2) = \alpha(4.95, 0.238, 0.20, 0) \cdot 10^{-9} \\ = (0.919, 0.0439, 0.0375, 0)$$

Do que se pode concluir que a chance de roubo ( $h_2$  ou  $h_3$ ) é  $0.0439 + 0.0375 = 8.14\%$ .

Evidentemente, para a atualização na crença não é necessário esperar até que todas evidências estejam coletadas, podendo-se procedê-la incrementalmente. Por exemplo, supondo-se a observação primeiro de  $e_1 = \text{"som alto"}$ , a crença em  $H$  é atualizada para :

$$P(h_i/e_1) = \alpha(0.0099, 0.00396, 0.0004, 0) \\ = (0.694, 0.2770, 0.028, 0)$$

Esta crença serve agora como crença a priori para a próxima atualização, quando a evidência  $e_2 = \text{"sem som"}$  for observada. A

atualização será :

$$\begin{aligned} P(h_i/e_1, e_2) &= \alpha' \cdot \lambda_{2i} \cdot P(h_i/e_1) \\ P(h_i/e_1, e_2) &= \alpha' \cdot (0.397, 0.0166, 0.014, 0) \\ &= (0.919, 0.0439, 0.0375, 0) \end{aligned}$$

como anteriormente. Deste modo, o conhecimento do estado do detector 2 diminui a crença em uma tentativa de roubo de 30.5 para 8.14% [PEA87].

Para a aplicação das expressões anteriores em Sistemas Especialistas, deve-se fazer uma modificação, uma vez que nestas, assume-se que as evidências são eventos certos ou impossíveis (i.e.,  $P(e_j) = \{0,1\}$ ). O tratamento de evidências incertas na abordagem bayesiana está colocado de forma distinta nos trabalhos de Pearl [PEA87] e Bonissone [BON87]. A seguir apresenta-se os principais pontos discutidos por cada autor.

#### 3.4.3. Evidências Incertas - Abordagem de Pearl [PEA87]

Uma das principais restrições direcionadas à abordagem bayesiana é o fato de que ela não pode tratar evidências incertas, uma vez que a relação  $P(A/B)$  requer que o evento condicional B seja conhecido com certeza [PEA87].

Ilustrativamente, Pearl [PEA87] apresenta as dificuldades no tratamento bayesiano quando as evidências são incertas retomando seu exemplo do sistema de alarme.

#### Exemplo 3-4 - [PEA87]

Basicamente, Pearl sugere uma situação em que o proprietário da residência com o sistema (Mr. Holmes) recebe a informação de um vizinho (Dr. Watson) de que seu sistema de alarme disparou. Mr. Holmes não pode tomar esta informação como certa porque Dr. Watson sabidamente aprecia fazer brincadeiras de mau-gosto. Então, a fim de saber se efetivamente o alarme disparou e inferir uma possível tentativa de roubo, ele consulta sua vizinha (Mrs. Gibson) que, apesar de ter problemas com álcool, é mais confiável que Dr. Watson [PEA87].

Pearl [PEA87] lembra que, uma vez que a evidência  $s$  = som do sensor é agora incerta, não se pode mais usá-la como evidência na expressão 3-15, devendo-se aplicar 3-15 para a



evidência na atual situação ( $w$  = testemunho de Dr. Watson) :

$$(3-28) \quad O(h/w) = L(w/h).O(h)$$

As dificuldades com a expressão 3-28 concentram-se na determinação de  $L(w/h)$ , não tão simples de ser obtida quanto  $L(s/h)$ . Isto porque esta determinação pressupõe a investigação de um processo de duas etapas, como mostra a figura 3-2 [PEA87].

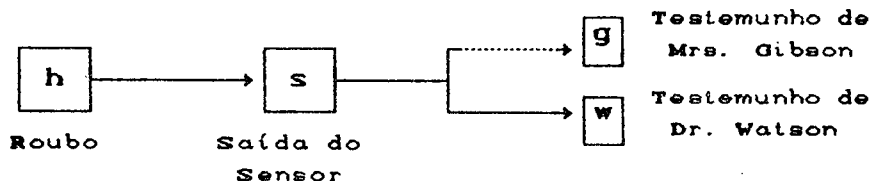


FIGURA 3-2 : Diagrama Ilustrativo de Inferência em Cascata Através de uma Variável Intermediária S - FONTE [PEA87].

Outra dificuldade adicional é o fato de que, mesmo com a obtenção de  $L(w/h)$ , não se poderia combiná-lo com outros testemunhos (Mrs. Gibson -  $g$ ) por simples multiplicação (eq. 3-26), já que estes testemunhos podem não preservar a independência condicional em relação a  $h$ . O testemunho de Mrs. Gibson depende somente do fato de o alarme poder ser ouvido em sua residência e não do fato de estar efetivamente havendo tentativa de roubo [PEA87].

A solução dada por Pearl [PEA87] foi considerar que cada testemunho depende diretamente do sistema de alarme ( $s$ ) e está somente indiretamente influenciado pela possível ocorrência de roubo ( $h$ ) ou pelo outro testemunho (figura 3-2).

A partir daí, Pearl [PEA87] utiliza as equações 3-22 e 3-0 (c), assumindo todos estados possíveis da variável intermediária  $s$ , a fim de colocar as observações anteriores no formalismo bayesiano. Tem-se, assim, a seguinte expressão :

$$P(h_i/g, w) = \alpha . P(g, w/h_i) . P(h_i)$$

resultando em :

$$(3-29) \quad P(h_i/g, w) = \alpha . P(h_i) . \sum_j P(g, w/h_i, s_j) . P(s_j/h_i)$$

onde  $s_j$  ( $j = 1, 2$ ) representa a ativação de dois estados possíveis ( $s_1$  = disparo do alarme e  $s_2$  = alarme não disparou). Além disso, a independência condicional de  $g, w$  e  $h_i$  em relação à variável  $s$  leva a [PEA87] :

$$(3-30) \quad P(g, w/h_i, s_j) = P(g/s_j) . P(w/s_j)$$

o que torna a equação 3-29 em :

$$(3-31) \quad P(h_i/g, w) = \alpha \cdot P(h_i) \cdot \sum_j P(g/s_j) \cdot P(w/s_j) \cdot P(s_j/h_i)$$

Pearl [PEA87] interpreta a equação 3-31 como um processo de três estados : primeiro. os vetores de probabilidade  $P(g/s_j)$  e  $P(w/s_j)$  são multiplicados juntos, a fim de obter o vetor de probabilidade  $\Lambda_j(s) = P(e/s_j)$ , onde  $e$  representa a evidência total coletada,  $g$  e  $w$ . Segundo, o vetor  $P(e/s_j)$  é multiplicado pela matriz de ligações causais  $M_j = P(s_j/h_i)$  para formar o vetor de probabilidades da hipótese superior  $M_j = P(e/h_i)$ . Por fim, usando-se a equação 3-1 (também 3-22 ou 3-26),  $\Lambda_i$  é multiplicado pela probabilidade a priori  $P(h_i)$  para dar a crença total em  $h$  [PEA87].

Segundo Pearl [PEA87], este processo representa uma regra "psicológica" e computacional para ponderar a variável  $s$ . Possibilita-se a utilização de informações localizadas oriundas de diversos domínios (e.g.  $P(h_i)$ ,  $P(g/s_j)$ ,  $P(w/h_i)$ ) e o ajustamento conjunto destas para uma forma global, inferindo  $P(h/e)$  em estágios, através de operações vetoriais simples e locais.

Segundo Pearl [PEA87] esta regra tem induzido alguns pesquisadores a afirmar que a independência condicional não é apenas um acidente da natureza o qual deve-se esperar passivamente e sim uma necessidade psicológica ativamente arbitrada, quando necessário, por, por exemplo, atribuição de nomes para novas e hipotéticas variáveis. Pearl [PEA87] lembra o caso do diagnóstico médico como um exemplo, onde, quando alguns sintomas influenciam diretamente outros, o médico inventa nomes para a interação (e.g. estado complicado, patológico, etc.) e a trata como uma nova variável auxiliar que induz a independência condicional; saber o estado exato da variável auxiliar torna os sintomas interativos independentes entre si [PEA87].

## 3.4.4. Evidências Incertas - Bonissone [BON87] e Duda [DUD76]

Pearl [PEA87] e Bonissone [BON87] relatam maneiras distintas de tratar a presença de evidências incertas.

Para Bonissone [BON87], a modificação visando considerar evidências incertas ocorre a partir da fórmula de interpolação linear. No caso de uma única evidência, a probabilidade posterior  $P(h/e^{'j})$  é calculada pela seguinte expressão :

$$(3-32) \quad P(h/e^{'j}) = P(h/e_j).P(e_j/e^{'j}) + P(h/-e_j).P(-e_j/e^{'j})$$

onde :  $P(e_j/e^{'j})$  é a estimativa do usuário da probabilidade que a evidência  $e_j$  seja verdade, dada a observação relevante  $e^{'j}$ .

Na expressão acima,  $e^{'j}$  representa o índice relacionado a determinada evidência (por exemplo, alguém ouviu o som do alarme, sendo que, por algum motivo, não se pode tomar esta opinião como verdade absoluta). A probabilidade de ocorrer a hipótese  $h$ , dado o índice da evidência  $e_j$  é resultado de uma interpolação entre a ocorrência de  $h$ , dado  $e_j$  e  $e^{'j}$  e a ocorrência de  $h$ , dado  $-e_j$  e  $e^{'j}$ .

Uma razão probabilística,  $L^{'j,k}$ , é calculada a partir de seguinte relação entre as chances posteriores :

$$(3-33) \quad L^{'j,k} = \frac{O(h/e^{'j})}{O(h)}$$

A chance posterior para todas as evidências é então computada como :

$$(3-34) \quad O(h/e^{'1}, e^{'2}, \dots, e^{'m}) = O(h) \cdot \prod_{j=1, m} L^{'j,k}$$

Contudo, devido à excessiva restrição aos dados de entrada do usuário, a expressão 3-32 deve ainda ser modificada, já que o usuário deve especificar os seguintes dados [BON87] :

$O(h)$ , a chance a priori de  $h$  da qual a probabilidade  $P(h)$  pode ser derivada;

$L_{j,k}$ , a medida da *necessidade* da qual  $P(h/-e_j)$  pode ser derivada; e

$O(e_j)$ , a chance a priori de  $e_j$ , da qual a probabilidade  $P(e_j)$  pode ser obtida.

Bonissone [BON87] afirma que estes requerimentos são similares à especificação de uma linha nas coordenadas  $[P(e/e'), P(h/e')]$  com três pontos :

$$(0, P(h/-e_j)); (P(e_j), P(h)); (1, P(h/e_j))$$

A modificação adotada para prever inconsistências do usuário é a modificação na expressão 3-32 para uma função linear por partes, definida por dois segmentos de reta passando através dos três pontos acima [DUD76].

#### 3.4.5. Evidências Virtuais ou Intangíveis

Durante o processo de avaliações probabilísticas na Abordagem Bayesiana, é importante garantir a impossibilidade de se considerar duas vezes determinada evidência. Isto pode ocorrer quando determinada avaliação de crença por parte do especialista está subjetivamente fundamentada em outras evidências além daquela instanciada no momento. Trata-se de situações em que há evidências difíceis de se considerar diretamente, devido às dificuldades do avaliador em explicar todo seu processo de avaliações em detalhes, geralmente apresentando conclusões informativas que resumem as evidências observadas.

Pearl [PEA87] ilustra esta situação para o exemplo 3-4 apresentando uma nova situação, abordada a seguir.

#### Exemplo 3-5 - [PEA87]

Supõe-se que, ao consultar Mrs. Gibson, Mr. Holmes percebe que ela está um pouco "alegre", em função da bebida. Ao invés de responder sua pergunta diretamente, ela descreve sua última operação e os barulhos e crimes que têm rondado os vizinhos ultimamente. Ao final, Mr. Holmes conclui das conversas que existe 80% de chances de Mrs. Gibson ter ouvido o alarme de sua janela.

Neste caso, é impossível determinar-se  $P(e/som \text{ do alarme})$ , já que isto implicaria em antecipar, descrever e associar probabilidades a todos os possíveis cursos das observações que Mrs. Gibson pode ter tido em tais circunstâncias [PEA87]. Neste caso, a conclusão de Mr. Holmes é que, com base no julgamento do testemunho de Mrs. Gibson (e somente isto), a hipótese do som do alarme tem uma crença associada de 80%. A questão é como integrar este julgamento no corpo de evidências previamente coletadas [PEA87].

Segundo Pearl [PEA87], a inclusão de uma evidência virtual no Tratamento Bayesiano constitui uma tarefa simples. Para tal, basta interpretar a crença associada como sendo uma informação sobre a razão probabilística. No exemplo 5, a crença de Mr. Holmes baseando-se em Mrs. Gibson será interpretada como sendo a razão  $P(g/tocou \text{ o alarme}) : P(g/não \text{ tocou o alarme}) = 4/1$  [PEA87].

Em termos genéricos, Pearl [PEA87] afirma que, se uma variável (*upon variable*) sob a interferência da evidência implícita e tem alguns estados possíveis  $s_1, s_2, \dots, s_i$ , deve-se instruir o avaliador a estimar a magnitude relativa dos termos  $P(e/s_i)$ . Assim, desde que as magnitudes absolutas não afetem os cálculos, pode-se proceder a atualização das crenças como se este vetor de probabilidades tivesse se originado de um evento ordinário e, lógico e determinístico. Como exemplo, supõe-se que a chamada do telefone de Mr. Watson já tivesse contribuído com uma razão probabilística de 9/1 em favor da hipótese do som do alarme. O peso combinado dos testemunhos de Gibson e Watson geraria um vetor  $\Lambda_i(s) = P(w, g/s) = (36, 1)$  [PEA87].

Pode-se integrar este vetor nos cálculos da equação 3-31. Deste modo, usando-se os números apresentados no exemplo 1, tem-se [PEA87] :

$$\begin{aligned}
 A_i(h) &= \sum_j A_j(s) \cdot P(s_j/h_i) \\
 &= \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.25 \\ 1.35 \end{bmatrix} \\
 P(h_i/g, w) &= \alpha \cdot A_i(h) \cdot P(h_i) \\
 &= \alpha \cdot (34.25, 1.35) \cdot (10^{-4}, 1 - 10^{-4}) \\
 &= (0.00253, 0.99747)
 \end{aligned}$$

Pearl [PEA87] observa que este processo só será consistente se houver certeza de que a crença de Mr. Holmes de 80% está baseada unicamente no testemunho de Mrs. Gibson, não incluindo nenhuma crença de evidências prévias (e.g. o testemunho de Mr. Watson ou informações sobre a taxa de crimes), sob pena de se considerar duplamente determinada informação. Segundo Pearl [PEA87], os bayesianos afirmam que se pode explicitar as origens das crenças de uma pessoa mediante perguntas do tipo "Qual seria sua crença se você não tivesse recebido a chamada de Watson?" ou "estime o aumento em sua crença devido somente ao testemunho de Gibson".

Neste sentido, Pearl [PEA87] propõe uma alternativa para a inferência em relação às crenças. Para o exemplo 3-5, poder-se-ia partir de uma situação inicial em que as estimativas iniciais de Mr. Holmes corresponderiam a um total desconhecimento (probabilidade do disparo ou do não do alarme iguais a  $1/2$ ). Devido ao testemunho de Mrs. Gibson, esta crença passou a  $P(\text{alarme}/g) = 80\%$ , correspondendo a uma taxa probabilística de 4/1 em favor do alarme.

#### 3.4.6. Previsão de Eventos Futuros

Uma das vantagens atribuídas à Abordagem Bayesiana em relação às demais é a possibilidade de se considerar eventos ainda não observados, como, por exemplo, o índice de inflação do próximo mês ou, no caso de diagnóstico médico, o prognóstico de doenças. Pearl [PEA87] afirma que possivelmente a necessidade de facilitar este tipo de estimativas leva o ser humano a adotar o esquema

causal para codificar o conhecimento oriundo de experiências. A seguir, novamente tomemos o exemplo apresentado por Pearl [PEA87] para demonstrar como o Raciocínio Bayesiano aborda esta questão.

#### Exemplo 3-6 - [PEA87]

Imediatamente após sua conversa com Mrs. Gibson, quando Mr. Watson prepara-se para deixar seu escritório, ele lembra que sua filha está para chegar em casa a qualquer minuto e, se encontrar o alarme acionado, provavelmente (0.7) telefonaria para ele pedindo instruções. Agora, Mr. Holmes não sabe se deve esperar mais alguns minutos para o caso de ela chamar.

A resolução proposta por Pearl [PEA87] pressupõe a definição de mais um evento  $d$  = "a filha chamará", o que adiciona um link causal na figura 3-2. Pearl [PEA87] assume que ouvir o som do alarme ( $s$ ) é o único elemento capaz de levar a uma chamada telefônica, gerando um link entre as variáveis  $s$  e  $d$  na seguinte forma [PEA87] :

	d (haverá chamada)	-d (não haverá chamada)
s	ligado	0.7
	desligado	0.0
		0.3
		1.0

Considerando estes valores, a  $P(d/\text{todas evidências})$  é obtida através de :

$$(3-35) \quad P(d/e) = \sum_j P(d/s_j, e) \cdot P(s_j/e) = \sum_j P(d/s_j) \cdot P(s_j/e)$$

esta expressão permite concluir que toda a influência que os testemunhos de Mrs. Gibson e Mr. Watson têm sobre  $d$  aparece na crença que eles induzem em  $s$ , ou seja,  $P(s_j/e)$  [PEA87]. Este fato parece ser intuitivo, pois, se Mr. Holmes tivesse que decidir sobre a chamada baseando-se apenas na crença sobre o acionamento do alarme, estaria utilizando seus conhecimentos que permitiram inferi-la, ou seja, os testemunhos de seus vizinhos.

A questão remanescente é como obter  $P(s_j/e)$ , considerando que se conhece as probabilidades  $P(h_i/e)$ . Uma maneira simplificada é considerar  $s$  como hipóteses intermediárias, o que, pela equação 3-1, levaria à seguinte expressão [PEA87] :

$$(3-36) \quad P(s_j/e) = \alpha \cdot P(e/s_j) \cdot P(s_j)$$

onde o termo  $P(e/s_j)$  é o vetor probabilístico  $\Lambda_j(s)$  que, no exemplo 3-5, foi calculado como  $(1,36)$ ; e  $P(s_j)$  é dada pela multiplicação matricial [PEA87] :

$$P(s_j) = \sum P(s_j/h_i).P(h_i) = (10^{-4}, 1 - 10^{-4}) \cdot \begin{bmatrix} 0.95 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \\ = (0.0101, 0.9899)$$

Utilizando-se a expressão 3-36, tem-se :

$$P(s_j/e) = \alpha.P(e/s_j).P(s_j) = \alpha.(36,1).(0.0101,0.9899) \\ = (0.2686, 0.7314)$$

que atribui uma crença de 26,86% ao disparo do alarme, prevendo a chamada da filha de Mr. Holmes (evento  $d$ ), através da equação 3-35, com uma probabilidade de :

$$P(d/e) = \sum_j P(d/s_j).P(s_j/e) = (0.2686, 0.7314) \cdot \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.188$$

#### 3.4.7. Múltiplas Causas para Determinada Hipótese

Nestes exemplos apresentados por Pearl [PEA87] sobre o Raciocínio Bayesiano em Inteligência Artificial, verifica-se que os mecanismos de atualização de crenças estão relacionados a ligações causais únicas entre evidência e hipótese, ou seja, somente uma variável é considerada como causa para qualquer outra variável. Embora simplifique os cálculos computacionais, esta estrutura possui baixo poder representacional, já que exige o agrupamento de todos os fatores causais comuns a uma consequência. O ser humano, ao contrário, costuma confrontar os diversos fatores causais, considerando-os como variáveis independentes.

Pearl [PEA87] ilustra este mecanismo adicionando mais um fator em seu exemplo do alarme, o que levará posteriormente ao estudo das Redes Bayesianas, uma generalização do Raciocínio Bayesiano em Sistemas Especialistas. A seguir, apresenta-se esta ampliação que Pearl agrega a seu exemplo.

#### Exemplo 3-7 - [PEA87]

Ao refletir mais sobre a questão, Mr. Holmes recorda que ele viu no manual de seu sistema de alarme que o mesmo é sensível a terremotos e pode disparar (0.2) acidentalmente. Ele pensa que,



se um terremoto ocorresse, certamente (0.9) estaria nos noticiários. Assim, Mr. Holmes liga seu rádio e aguarda a ligação de sua filha.

Esta nova situação coloca um segundo episódio como possível causa para o disparo do alarme (terremoto), além da tentativa de roubo. Embora as tentativas de roubo, com certeza, possam ser consideradas independentes de terremotos, neste caso, o anúncio de terremoto reduziria a crença na tentativa de roubo, já que se constitui em outra "forma de explicar" o disparo do alarme. A nova representação para as ligações causais está apresentada na figura 3-3.

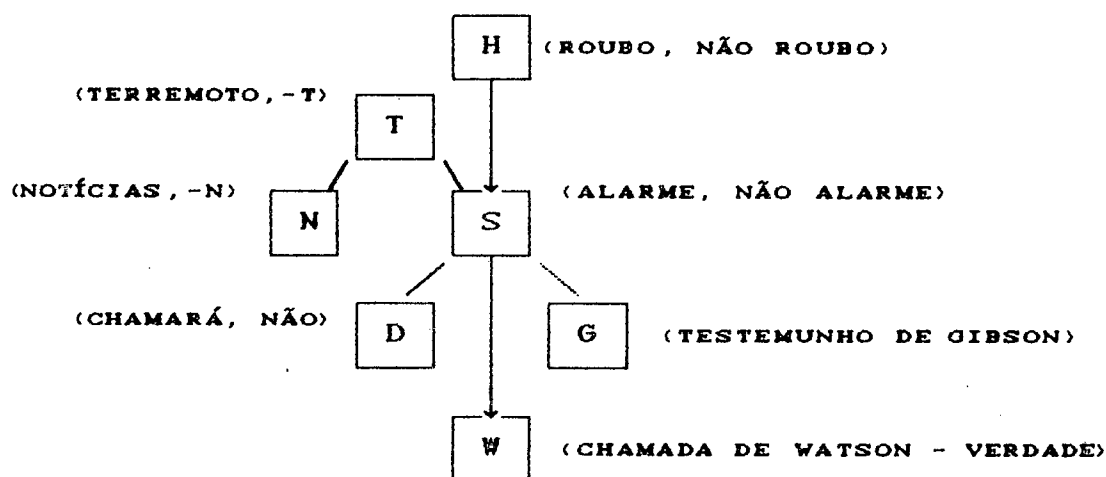


FIGURA 3-3 : Diagrama Representando as Dependências Causais Entre as Variáveis do Exemplo 7 - FONTE [PEA87].

Pearl [PE87] situa a importância das relações multi-causais no padrão de raciocínio humano. Por exemplo, quando um médico descobre evidências em favor de determinada doença, ele reduz sua credibilidade em outras, embora o paciente pudesse sofrer de duas ou mais doenças simultaneamente.

Para tratar as relações multi-causais no Raciocínio Bayesiano, deve-se definir uma matriz  $M$  a qual fornece a distribuição da variável conseqüente como uma função de qualquer combinação possível de variáveis causais. No exemplo 3-7, pode-se especificar  $M = P(s/t,h)$ , onde  $t$  constitui a variável  $t = \{\text{terremoto, não terremoto}\}$  [PEA87].

No exemplo 3-2, as duas variáveis existentes foram

agregadas em uma variável composta  $h = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ . A matriz  $M$  é idêntica na forma àquela descrita no exemplo 3-2. Entretanto, tratar  $t$  e  $h$  separadamente é mais vantajoso, pois permite relacionar uma delas a um conjunto separado de evidências sem consultar a outra. Por exemplo, a relação entre a notícia no rádio ( $n$ ) e o terremoto ( $t$ ) pode ser quantificada pelas probabilidades  $P(n/e)$ , sem ter que considerar o evento irrelevante da tentativa de roubo, como poderia ser necessário se  $(t, n)$  constituíssem uma única variável [PEA87].

Além disso, com uma informação do noticiário ( $n$ ), pode-se atualizar as crenças em  $t$  e  $h$  em dois conjuntos distintos de operações, através da atualização de  $s$ , o que está intimamente relacionado ao processo de atualização utilizado pelas pessoas [PEA87].

A dificuldade no tratamento de fatores causais surge quando seu total,  $k$ , é muito elevado, já que será necessário uma tabela de relações de tamanho  $2^k$ . Pearl [PEA87] afirma, contudo, que se pode adotar um procedimento análogo ao que o ser humano faz nestes casos, ou seja, conceitualizar as relações causais criando hierarquias de pequenos conjuntos de variáveis. Assim, cada interação entre os fatores de cada conjunto normalmente estará em uma das poucas estruturas-protótipo pré-determinadas relacionadas aos  $k$  parâmetros. Pearl [PEA87] apresenta, como exemplo de tais estruturas protótipos no caso do alarme, barulho OU portas (i.e. qualquer um dos fatores pode disparar o alarme), barulho E portas, e vários outros mecanismos de estímulo (i.e. mecanismos que, embora não tenham influência sozinhos, são capazes de ativar outros mecanismos que podem disparar o alarme).

#### 3.4.8. Redes Bayesianas

As figuras 3-2 e 3-3, quando analisadas mais detalhadamente, mostram-se importantes representações do problema do alarme. Apesar de qualquer relaxação numérica que possa ocorrer, as dependências existentes no problema estão todas

representadas, o que as torna mais relevantes que as próprias medidas probabilísticas. Quando este tipo de representação esquemática das relações causais é generalizado, tem-se uma das linhas de pesquisa mais estudadas em Raciocínio Bayesiano, as Redes Bayesianas ([SPI86], [PEA86a], [PEA86b], [VEN85]).

Em uma análise comparativa do Raciocínio Humano com o mecanismo de atualização de crenças do Raciocínio Bayesiano, Pearl [PEA85] apresenta uma das hipóteses básicas nas Redes Bayesianas. A hipótese é se admitir que, ao atualizar suas crenças, o ser humano investiga as ligações causais que podem ser representadas em um grafo, possibilitando a determinação das operações que são consideradas "psicologicamente significativas" para o ser humano. As Redes Bayesianas oferecem um formalismo efetivo para descrever e controlar estas operações em grafos [PEA85].

As Redes Bayesianas (figura 3-4) são grafos acíclicos nos quais os nós representam nomes de variáveis. Cada variável representa uma partição finita do universo dada pelos valores ou estados das variáveis. Uma variável pode denotar uma coleção de hipóteses (e.g. identidade de organismos ORG1, ORG2, etc) ou uma coleção de possíveis observações (e.g temperatura do paciente : alta, média, baixa). Nas Redes Bayesianas, os arcos significam a existência de relações causais entre as proposições ligadas ou, mais especificamente, um arco entre os nós A e B denota uma regra na forma "Se A, então B". As extensões destas influências (incertezas) são quantificadas por uma matriz de probabilidade condicional cujas células são  $P(A_i/B_j)$  [PEA82].

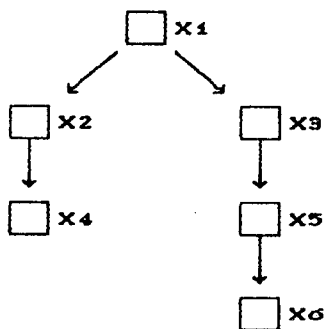


FIGURA 3-4 : Exemplo de uma Rede Bayesiana - FONTE [PEA85].

Genericamente, se o grafo contém  $x_1, \dots, x_n$  e  $S_i$  é o conjunto de parentes de  $x_i$ , pode-se obter uma quantificação consistente e completa ao se especificar, para cada nó  $x_i$ , uma estimativa subjetiva  $P'(x_i/S_i)$  da probabilidade de que  $x_i$  obtenha um valor específico, dados os estados possíveis de  $S_i$  ( $P(x_i/S_i)$ ). O produto de todas estas estimativas,

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_i P'(x_i/S_i)$$

constitui uma probabilidade conjunta que sintetiza as quantidades acessadas, ou seja, ao se computar as probabilidades condicionais  $P(x_i/S_i)$  dadas por  $P(x_1, \dots, x_n)$ , os valores originais são retomados ([PEA85] e [PEA87]). Pearl [PEA87] exemplifica tomando a Rede Bayesiana da figura 3-4. Pode-se escrever sua distribuição por :

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = P(x_6/x_5) \cdot P(x_5/x_1, x_3) \cdot P(x_4/x_1, x_2) \cdot P(x_3/x_1) \cdot P(x_2/x_1) \cdot P(x_1)$$

Através de uma Rede Bayesiana, pode-se identificar claramente as independências entre as variáveis que participam do modelo. Pearl [PEA85] apresenta um critério para identificar estas independências em um grafo :

*"Se todos os caminhos entre  $x_i$  e  $x_j$  são "bloqueados"<sup>6</sup> por um subconjunto  $S$  de variáveis,  $x_i$  é independente de  $x_j$ , dados os valores das variáveis em  $S$ .<sup>7</sup> Assim, cada variável  $x_i$  é independente de seus irmãos<sup>7</sup>*

<sup>6</sup> Um caminho entre dois nós  $x_i$  e  $x_j$  é bloqueado quando contém uma variável instanciada entre duas setas divergentes ou em cascata. Em outras palavras, o caminho é bloqueado quando não se pode ir de  $x_i$  até  $x_j$  seguindo as setas do grafo.

Há uma distinção para o caso de setas convergentes em um nó  $x_k$ . Neste caso, o caminho normalmente é bloqueado, a menos que  $x_k$  ou qualquer de seus descendentes seja instanciado.

<sup>7</sup> Dada uma aresta (ou arco)  $V(x_i, x_j)$  em um grafo, diz-se que  $x_i$  é pai de  $x_j$ . Dois nós que possuem o mesmo pai são chamados de irmãos [SZW84]. Além disso, o pai do nó  $x_i$  é chamado avô do nó  $x_j$ . Por exemplo, na figura 3-4,  $x_1$  é pai de  $x_2$  e  $x_3$ .  $x_2$  e  $x_3$  são irmãos e  $x_1$  é avô de  $x_4$ .

*não-descendentes e de seus avós, dados os valores destas variáveis nos conjuntos de parentes  $S_i$ . [PEA85]*

A fim de que este critério baseado no conceito de caminho bloqueado possa ser utilizado genericamente, Pearl [PEA87] ressalta que se deve considerar uma interpretação especial para separação entre dois nós que compartilham filhos comuns.

Pode-se exemplificar estas observações tomando-se o grafo da figura 3-4. As variáveis  $x_2$  e  $x_3$ , por exemplo, são independentes, dados  $S_1 = \{x_1\}$  ou  $S_2 = \{x_1, x_4\}$ , já que os dois caminhos entre  $x_2$  e  $x_3$  são bloqueados por um destes conjuntos. Por outro lado,  $x_2$  e  $x_3$  podem não ser independentes, dado  $S_3 = \{x_1, x_6\}$ , já que  $x_6$  como descendente de  $x_5$ , "desbloqueia" a conexão seta-a-seta a té  $x_5$ , abrindo um caminho entre  $x_2$  e  $x_3$  [PEA85].

#### 3.4.8.a. A Propagação de Crença nas Redes Bayesianas

Construída a Rede Bayesiana, pode-se utilizá-la para representar o conhecimento causal genérico de um dado domínio ou para interpretar uma nova informação. A interpretação consiste em instanciar um conjunto de variáveis correspondentes ao dado de entrada e determinar seu impacto em um conjunto de variáveis chamadas hipóteses.

Operacionalmente seria interessante realizar este processo externamente, através de um interpretador que pudesse acessar toda a rede e usar suas facilidades computacionais para manipular e estocar seus resultados intermediários. Entretanto, este não parece ser o processo de raciocínio usado pelo ser humano. Suas limitações na memória de curto prazo, combinadas com uma relutância em alterar rapidamente a linha de raciocínio e com a atenção voltada para a narrativa, parecem sugerir um mecanismo localizado e progressivamente incremental ao longo dos caminhos pré-descritos. Além disso, uma análise da compreensão humana em baixos níveis de informação sugere que o processo de atualização de crenças é feito intrinsecamente ao conhecimento e não

externamente a ele [PEA87].

Com relação à Rede Bayesiana, considerar o conhecimento intrinsecamente significa tomar a rede não apenas como uma maneira simplificada de codificar o conhecimento factual, mas também como uma arquitetura para raciocinar sobre este conhecimento. Pearl [PEA85] elucida este paradigma como sendo a consideração das ligações na rede como únicos caminhos e centros de ativação que direcionam e propagam o fluxo de dados no processo de aquisição e atualização das crenças. Assim, cada nó da rede pode ser visto como um processador separado que mantém os parâmetros de crença para um conjunto de variáveis "hospedeiras" e manipula as linhas de comunicação para e de um conjunto de variáveis vizinhas relacionadas.

Pearl [PEA85] detalha este mecanismo de interação entre os nós cujo objetivo principal é a manutenção da consistência. As linhas de comunicação são abertas, ou seja, cada processador pode interrogar os parâmetros de crença associado com seus vizinhos e compará-los aos seus próprios parâmetros. Se as quantidades comparadas não satisfizerem certas restrições locais, o nó responsável é ativado para revisar seus parâmetros violados e corrigi-los. Isto, por sua vez, pode desencadear um processo similar de revisões em seus processadores vizinhos, até que o equilíbrio esteja reestabelecido [PEA85].

Uma das preocupações que tem afligido os pesquisadores bayesianos neste mecanismo de atualização é a possibilidade de ciclos. Se uma crença forte em uma hipótese significar maior expectativa para a ocorrência de suas várias manifestações e se, em seguida, uma certeza maior na ocorrência destas manifestações levar à crença na hipótese, pode-se incidir em um ciclo quando o processador responsável por estas proposições iniciar a comunicação com um outro [PEA87].

A fim de manter a estabilidade, Pearl [PEA85] propõe

que, para cada proposição, tenha-se um registro explícito das origens de sua crença. Isto consiste em caracterizar a crença em cada proposição como um vetor de parâmetros similar ao vetor de probabilidades da equação 3-23, com cada componente representando o grau de apoio que aquela proposição "hospedeira" obtém de cada um de seus vizinhos.

Pearl [PEA87] justifica este procedimento afirmando que ele facilita uma distinção clara entre a crença baseada em total ignorância e a crença oriunda de evidências amplamente conhecidas, mas conflitantes (ambas modeladas pela distribuição uniforme de probabilidade). Além disso, o autor atribui a este mecanismo maiores facilidades para possíveis exigências explanatórias do sistema especialista. Entretanto, observando detalhadamente o procedimento proposto (em [PEA85]) percebe-se o acréscimo de mais parâmetros ( $\pi$  e  $\lambda$ ) à Rede Bayesiana e de uma série de mecanismos de de comparação para a atualização das crenças, exigindo que procedimentos não-usuais sejam necessários em problemas reais (e.g. modelagem por Redes Neurais, anexação dos conceitos ao próprio *hardware*).

#### 3.4.8.a. Utilização das Redes Bayesianas Como Modelo em Outros Tratamentos de Incerteza

É relevante ressaltar que a Rede Bayesiana providencia uma clara representação das relações de dependência existentes no modelo. Isto pode ser útil não só em Raciocínio Bayesiano. Por exemplo, ao se modelar o conhecimento em determinada aplicação, pode-se perfeitamente representar as dependências em uma Rede Bayesiana e, posteriormente, utilizar outro tratamento de incerteza.

#### 3.5. CRÍTICAS À ABORDAGEM BAYESIANA

Vários autores têm apontado limitações no Tratamento Bayesiano em Inteligência Artificial. As críticas vão desde aspectos mais gerais como a dificuldade que o ser humano possui em

representar suas crenças na forma probabilística [HIN87] até aspectos mais específicos às simplificações adotadas pelos pesquisadores bayesianos [BON87].

Neste capítulo, aborda-se principalmente as limitações de ordem técnica, ou seja, relativas às simplificações adotadas no tratamento de incerteza segundo a Abordagem Bayesiana. Nos capítulos posteriores, não raro as técnicas em questão estarão sendo confrontadas com a Abordagem Bayesiana e serão evidenciadas outras limitações presentes nesta abordagem.

### 3.5.1. Sobre as Hipóteses Simplificatórias

Analizando a Abordagem Bayesiana para o Tratamento de Incerteza, Pednault, Zucker e Muresan [PED81] detectaram uma inconsistência quando se pressupõe a independência condicional entre as evidências sob cada hipótese (eq. 3-3) e sua negação (eq. 3-11) conjuntamente com a mútua exclusividade e exaustividade do conjunto de hipóteses (eq. 3-2). Especificamente, os autores provaram que, sob estas hipóteses, se houver mais do que duas hipóteses competindo, nenhuma atualização probabilística poderia ser feita, ou seja :

$$P(e_j/h_i) = P(e_j/\neg h_i) = P(e_j) \text{ para todo } i, j$$

o que implica em

$$\lambda_{j,i} = 1 \text{ para todos } i, j$$

Pednault, Zucker e Muresan [PED81], embora tenham apontado a inconsistência quando se assume as simplificações no Tratamento Bayesiano, não apresentaram uma explicação para o fato de o sistema PROSPECTOR, mesmo adotando-as, demonstrar bons resultados. Os autores sugeriram que, talvez, no sistema não existissem efetivamente mais do que duas hipóteses conflitantes.

Contudo, em trabalho posterior, Glymour [GLY85] obteve um contra-exemplo patológico para as conclusões em [PED81]. O



autor encontrou uma falha na prova do teorema original de Hussain, sob o qual Pednault, Zucker e Muresan fundamentaram seus resultados. Esta análise foi ampliada por Johnson [JOH85] que apresentou contra-exemplos não-patológicos às constatações em [PED81]. Apesar disso, Johnson [JOH85] provou que, sob as mesmas hipóteses que fundamentaram [PED81], para qualquer hipótese  $h_i$ , existe no máximo uma evidência parcial capaz de atualizá-la.

Antes mesmo dos trabalhos de Johnson [JOH85] e Glymour [GLY85], Pearl [PEA82] afirmou que a equação 3-11, que requer a independência condicional entre as evidências sob a negação da hipótese é super-restritiva. Ao descartá-la, Pearl tem apresentado novos e promissores resultados. Contudo, a hipótese da independência condicional entre as hipóteses permanece necessária [BON87].

Outra crítica freqüente à Abordagem Bayesiana (e a outras que adotam a mesma hipótese) é a suposição da independência condicional entre as evidências sob uma hipótese. Bonissone [BON87] afirma que esta simplificação nem sempre pode ser satisfeita. O autor lembra que, se a Rede Bayesiana contiver múltiplos caminhos ligando uma evidência a uma mesma hipótese, as independências condicionais assumidas em 3-3 e 3-11 serão violadas. Embora, em muitos casos, possa-se manter estas expressões válidas através de um rearranjo das hipóteses (refinamento do espaço de hipóteses em grupos de variáveis mutuamente exclusivas e exaustivas), como exemplificam Pearl [PEA87] e Basu [BAS86], isto acarreta um aumento na quantidade de medidas de incerteza necessárias.

Segundo Bonissone [BON87] a equação 3-2, requerendo a mútua exclusividade e a exaustividade do conjunto de hipóteses, não é muito realista. A exaustividade (3-2 (i)), por exemplo, não valeria se mais do que uma hipótese ocorresse simultaneamente e é tão restritiva quanto a hipótese de falhas únicas dos sistemas de diagnóstico mais simples (e.g. não admitir mais do que uma doença

simultaneamente). Outra limitação é o fato de a eq. 3-2 (i) implicar em que qualquer hipótese possível seja conhecida a priori, sendo violada quando o domínio do problema não fosse adequado a uma representação de mundo-fechado (sabe-se tudo a priori) [BON87].

### 3.5.2. Sobre a Dependência de Contexto

Henkind e Harrison [HEN88] apontam uma dificuldade adicional da Abordagem Bayesiana, qual seja a dependência de contexto que a probabilidade de certos eventos possuem. Especificamente, os autores exemplificam com o diagnóstico de doenças, onde a localização geográfica afeta as estimativas probabilísticas (e.g. a malária é mais comum nos trópicos). Além disso, os anos modificam a incidência de doenças (e.g. há 50 anos atrás, a incidência de poliomielite era mais comum, sendo bem mais rara na atualidade) [HEN88].

### 3.5.3. Sobre a Inabilidade em Representar a Ignorância

Bonissone [BON87] afirma que talvez a limitação mais restritiva da Abordagem Bayesiana seja sua inabilidade em representar a ignorância. No Tratamento Bayesiano, não se pode deixar de fazer estimativas, mesmo quando estas inexistem. Para ilustrar esta afirmação, Bonissone [BON87] apresenta a interpretação bayesiana para a aposta dicotômica (*two-way betting interpretation*). Esta consiste em considerar a probabilidade de um evento A como a inclinação de um agente racional em aceitar uma das duas seguintes apostas :

Se você me pagar  $\$p$ , então eu concordo em lhe pagar  $\$1$  se A for verdade.

Se você me pagar  $\$(1-p)$ , então eu concordo em lhe pagar  $\$1$  se A for falso.

A primeira aposta representa a crença na probabilidade de que A não é maior que  $p$  e a segunda representa a crença de que a probabilidade de A não é menor que  $p$ .

Ao invés de estar explicitamente representada, a ignorância está oculta nas probabilidades a priori. Além disso, as deficiências na abordagem surgem no fato de que é impossível associar probabilidade a disjunções, ou seja, para eventos conjuntos, o que implica no requerimento de uma granularidade uniforme de evidência, como comentado anteriormente [BON87].

Pearl [PEA85], um dos principais defensores da Abordagem Bayesiana, combate este argumento. Segundo o autor, não há nenhuma razão para não se atribuir ao Tratamento Bayesiano a capacidade da não-designação probabilística, quando se procede a atualização de crenças via Redes Bayesianas.

Em termos mais específicos, Pearl [PEA85] lembra que, em uma Rede Bayesiana, a proposição "a evidência  $e$  leva diretamente à hipótese  $h$ " simplesmente significa que  $e$  está conectado à rede por uma ligação simples, entre  $e$  e  $h$ . Assim, para especificar o efeito de  $e$  em toda base de conhecimento, o especialista necessita somente quantificar a relação entre  $e$  e  $h$  através da razão probabilística, não precisando de modo algum observar os outros nós da rede. Pearl [PEA87] conclui afirmando que seria difícil imaginar outra forma de não-designação probabilística.

Mesmo adotando os procedimentos de Pearl [PEA85], no entanto, a exigência da mútua exclusividade continua e, ao contrário do caráter explícito da abordagem de Dempster e Shafer, não se evidencia claramente as relações entre os diversos subconjuntos representados na base de conhecimento, uma vez que se está associando estimativas a nós isoladamente, sem explicitar os mecanismos de atualização referentes aos demais subconjuntos relacionados, como ocorre no caso da Teoria da Evidência.

#### 3.5.4. Sobre a Não-diferenciação dos Tipos de Incerteza

Outra crítica freqüentemente associada à Abordagem Bayesiana refere-se à sua incapacidade de diferenciar situações de

ignorância total e situações de crenças de mesma extensão. Em outros termos, a Abordagem Bayesiana atribui uma distribuição uniforme de probabilidades tanto quando nada se conhece sobre os eventos como quando se acredita na possibilidade de cada evento com o mesmo grau de crença. Os principais críticos a esta característica são os pesquisadores da Teoria da Evidência [SHA76].

Os pesquisadores bayesianos, por sua vez, apresentam alternativas às implementações que podem eximir estes problemas. Pearl [PEA85] parte do seguinte exemplo :

- S<sub>1</sub> - Eu não sei nada sobre Baseball.
- S<sub>2</sub> - Ambos os times são fortes e eu entendo de Baseball.
- S<sub>3</sub> - Cada time tem chances iguais (50%) de vencer.

S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub> e S<sub>3</sub> refletem conhecimentos totalmente diferentes, ainda que suas avaliações probabilísticas sejam idênticas.

Pearl [PEA85] afirma que abandonar a Teoria da Probabilidade por isto é o mesmo que abandonar a Lógica porque a proposição "A é verdade" não mostra como a verdade de A foi estabelecida. Pearl [PEA85] propõe a manutenção de um mecanismo no qual as proposições que fundamentam cada crença associada estejam armazenadas. Por exemplo, a rede que apóia S<sub>1</sub> seria totalmente diferente da rede que apóia S<sub>2</sub>, embora seus valores sejam idênticos aos da proposição S<sub>3</sub>. Explicitamente, estas diferenças poderiam ser verificadas pelos parâmetros  $\pi$  e  $\lambda$  que Pearl [PEA85] acrescenta a cada nó da rede. Para S<sub>1</sub>, estes parâmetros indicariam a falta de evidências; para S<sub>2</sub>, por outro lado, haveria uma rede similar a de S<sub>3</sub>, onde determinados nós levariam a  $\lambda$  maiores que a unidade (favorecendo S<sub>3</sub>) e outros a  $\lambda$  menores (contra S<sub>3</sub>), levando a um equilíbrio final na rede.

O problema com este procedimento surge novamente nas complicações computacionais e no acréscimo de parâmetros ao problema. No caso da Teoria da Evidência, como será constatado no

capítulo 5, os critérios são bem mais simples e claros ao especialista quando ele atribui suas avaliações.

### 3.6. PROBABILIDADE SUBJETIVA E PROBABILIDADE OBJETIVA

Uma das principais questões presentes na Abordagem Bayesiana em Inteligência Artificial é o estudo do comportamento das avaliações subjetivas de crença feitas pelo ser humano. Tem-se investigado se estas efetivamente possuem o caráter bayesiano e se sistemas baseados em probabilidade subjetiva devem estar sujeitos às mesmas exigências formais da probabilidade objetiva.

Kuipers *et al.* [KUI88] apresentam interessante ilustração para exemplificar o fato de as pessoas terem claramente o conhecimento da "probabilidade subjetiva"<sup>8</sup>. Os autores comentam o fato de as pessoas saberem que o risco de ser atingido por um meteorito é negligenciável, enquanto que o risco de o ser por um automóvel não é. Contudo, raramente as pessoas conhecem, descrevem ou utilizam valores numéricos para estas probabilidades subjetivas e seu conhecimento intuitivo e habilidade em comparar os riscos de diferentes periculosidades são, geralmente, muito pobres.

O caso específico analisado por Kuipers *et al.* [KUI88] é o do tratamento probabilístico em situações de diagnóstico médico. Os autores salientam o fato de os médicos não estarem habituados a utilizar probabilidades numéricas em suas atividades diárias. Além disso, quando o fazem, há a tendência a erros suficientemente relevantes a ponto de resultar em práticas médicas errôneas. A alternativa encontrada pelos autores é um cuidadoso estudo da resolução de um problema por parte dos médicos em situação de

---

<sup>8</sup> Kuipers *et al.* [KUI88] usam o termo "likelihood" para a probabilidade subjetiva de que certos fatos são mais prováveis que outros e reservam o termo "probability" para a probabilidade matemática, número real que mede a incerteza e varia entre 0 e 1.

risco e incerteza. Segundo os autores, desta forma pode-se inferir propriedades da representação do conhecimento e estratégias de raciocínio usadas em situações complexas.

Este acompanhamento do processo pelo qual os especialistas resolvem, na prática, problemas em condições de incerteza já havia sido proposto por Shafer e Tversky [SHA85]. Estes autores afirmam que a tomada de decisão sob incerteza pode ser vista como um experimento do pensamento, projetado e conduzido para selecionar um conjunto viável de julgamentos elementares a fim de estimar as probabilidades subjetivas e combiná-las para produzir a decisão requerida. Além disso, eles ilustram como deveriam estes experimentos serem projetados dentro das estruturas formais de Análise de Decisão Bayesiana e Teoria das Funções de Crença de Shafer. As questões que precisam ser respondidas são :

1. Como as decisões são, geralmente, projetadas e tomadas em situações de risco e incerteza ?
2. Qual é a representação cognitiva das probabilidades subjetivas ?
3. Como os julgamentos individuais das probabilidades subjetivas são obtidos ?

Kuipers *et al.* [KUI88] preocupam-se com a primeira e a segunda questões. A terceira questão foi abordada por Tversky em trabalhos precedentes àquele com Glenn Shafer. Inicialmente reportar-se-á aos resultados de Kuipers *et al.* [KUI88] relativos à estrutura da decisão e à representação das probabilidades subjetivas.

Os experimentos apresentados por Kuipers *et al.* [KUI88] constituem da análise da resolução encaminhada por médicos experientes a um problema caracterizado por uma situação de risco e incerteza em graus elevados. A partir de suas experiências, Kuipers *et al.* registraram uma série de observações a respeito das duas primeiras questões anteriores, resumidas a seguir.

### 3.6.1. A Estrutura da Decisão

Conjugando duas técnicas de Representação de Conhecimento (i.e. transcrição de pensamento em voz alta e exame das respostas transcritas) no questionamento a três especialistas, Kuipers *et al.* [KUI88] observaram determinados fatos relacionados aos mecanismos de resolução adotados.

Os autores enfatizam a existência de uma considerável variação entre os diferentes especialistas e suas estratégias de explanação. Esta variação caracteriza-se, por exemplo, no fato de alguns especialistas serem mais prolixos nas considerações, ao explicitar o raciocínio. Um aspecto relevante no trabalho de Kuipers *et al.* [KUI88] é a caracterização destas diferenças no processo humano da resolução de problemas. Em alguns casos, um especialista descrevia o problema de decisão, discutia o conjunto de fatores relevantes e, finalmente, selecionava uma ação. Em outros casos, deixou-se o problema implícito, discutindo-se os fatores, embora, claramente, a escolha final adotada pressupõe a formulação do problema. Em outros casos, o problema foi explicitado, os fatores relevantes discutidos, mas as decisões não foram explicitadas exceto como pressuposto em um próximo problema. Nesta situação, os autores consideraram justificável a inserção de um passo de raciocínio implícito na sequência. Outra diferença encontrada foi na estratégia de resolução de cada especialista.

Apesar destas diferenças, Kuipers e os demais pesquisadores em [KUI88] salientam importantes similaridades entre os raciocínios dos especialistas e uma notável distinção com a análise formal de decisão (baseada na árvore de decisão construída). As similaridades estão na formulação do problema de decisão, seleção de uma alternativa e inserção de uma nova ação em um plano parcialmente completo. Quando se considera a análise formal de decisão, com relação às mesmas conclusões, a sequência de raciocínio é diferente. Os autores ressaltam o fato de que a estrutura comum entre os especialistas reflete a estrutura da representação do conhecimento e o método de inferência usado, não

podendo ser meramente consequência matemática da estrutura do problema.

Em relação à estrutura da decisão, os autores enfatizam a comparação entre aquela adotada pelos especialistas e a estrutura formal. No caso dos especialistas, há um padrão consistente entre a estrutura de decisão formulada. Segundo esta, tomou-se uma decisão inicial em um nível abstrato e, posteriormente, houve a especificação da decisão final. Com relação à árvore de decisão, pode-se dizer que suas etapas no raciocínio poderiam ser vistas como um movimento da raiz aos ramos terminais, mas considerando várias elaborações oriundas de situações imprevistas (onde Kuipers *et al.* [KUI88] usam o termo "oportunisticamente"). O contraste desta abordagem com análise formal de decisão advém do fato de que, nesta, dispende-se de uma árvore de decisão e nós aos quais associa-se probabilidades, determina-se as utilidades de um grande número de saídas finais altamente específicas e, então, retorna-se através da árvore para calcular as utilidades esperadas dos ramos no ponto escolhido.

Kuipers *et al.* [KUI88] analisam as decisões tomadas pelos especialistas caracterizando-as como resultantes do raciocínio incremental. Enquanto na análise formal possíveis erros e riscos nos teste clínicos são combinados em valores de utilidade esperada e propagados globalmente, o uso da informação pelos especialistas em um contexto local para tomar uma série de decisões incrementais foi a característica predominante. A razão para este procedimento é especificada como sendo a limitação humana em computar as informações. O processo cognitivo humano é relativamente lento, tem um suprimento limitado da memória de trabalho (embora efetivamente ilimitado na memória a longo prazo) e está sujeito a freqüentes interrupções.

A estratégia do planejamento incremental diminui estas deficiências. Os autores lembram o fato de que esta estratégia permite a partição de um grande e difícil problema em uma



seqüência de pequenas escolhas, cada uma das quais podendo ser tomada com base em uma soma relativamente limitada de informações. Caso o processo seja interrompido, as questões parcialmente tratadas podem ser memorizadas (ou arquivadas) e examinadas mais tarde, tal que pouco esforço seja perdido. Por outro lado, a análise formal de decisão requer uma grande árvore com muitos valores numéricos para serem encontrados, computados e estocados antes da decisão ser tomada. Caso a memória de trabalho não seja suficientemente grande para a árvore ou caso parte da árvore for perdida durante uma interrupção, um grande esforço é perdido. Assim, a análise formal de decisão só é viável com significativas quantidades de memória externa e recursos computacionais. Ainda segundo Kuipers *et al.* [KUI88], a abordagem incremental é melhor adequada aos recursos cognitivos dos tomadores humanos de decisão.

### 3.6.2. Representação das Probabilidades Subjetivas

Os procedimentos adotados por Kuipers *et al.* são aqui resumidamente apresentados. A metodologia utilizada é dos próprios autores em trabalho anterior ([KUI84]). Os autores denominam a mesma de *análise de frase*, com a qual identifica-se e se classifica cada frase transcrita que se refere à probabilidade subjetiva. Presume-se que qualquer conceito ou relação que está expresso verbalmente em uma explanação deve ser exprimível na representação do conhecimento cognitivo.

Os critérios utilizados para incluir uma frase na análise é o fato de ou a frase conter palavras relevantes como *chance*, *risco*, *etc* ou o fato de a frase ter um significado no contexto claramente relacionado a probabilidades subjetivas. As diferentes frases são classificadas em três categorias, de acordo com o tipo de afirmação. Estes subgrupos são caracterizados pelos três seguintes tipos de frases :

- frases que cotenham valores "categóricos" sem limites precisos, tais como *pequeno*, *moderado*, *muito alto*, *etc*.
- frases contendo afirmações relacionadas a probabilidades subjetivas, como *maior que*, *menor que* ou *igual a*.

- frases contendo valores numéricos ou distâncias.

As conclusões dos autores sobre os dados colhidos junto aos especialistas são duas : primeiramente, as descrições das probabilidades subjetivas são quase que exclusivamente de ordem qualitativa; além disso, há uma substancial variação individual na combinação das frases usadas. Outra interessante conclusão dos autores é a de que as referências com valores numéricos são tratadas da mesma forma que as descrições qualitativas, sem considerar a vantagem de suas propriedades numéricas. Ocorre que os termos numéricos surgem de forma distinta da teoria matemática da Probabilidade. Na verdade, as explanações com termos numéricos servem como *nomes* para focalizar ou limitar pontos definindo regiões qualitativas.

Finalmente, os autores identificam algumas restrições que devem ser satisfeitas na representação do conhecimento de probabilidade subjetiva dos especialistas. O modelo cognitivo do conhecimento das probabilidades subjetivas, segundo tais descrições, deve ter as seguintes características :

- Todas descrições probabilísticas (e subjetivas) são simbólicas. Isto é fruto da falta de evidências da utilização de operadores aritméticos ou de valores numéricos oriundos do armazenamento de dados anteriores.

- Há duas descrições simbólicas distintas de probabilidade subjetiva :

- descrições categóricas : valores difusos em escala absoluta.
- descrições ordinárias : definem relações de comparação (maior que, menor que, igual) entre pares de valores.

- Referência de valores de "balisamento", especificados ou numericamente ou em termos de uma situação bem-conhecida, servem como valores limites ou focais para descrições simbólicas das

probabilidades subjetivas.

### 3.6.3. As Estimativas Probabilísticas do Ser Humano

O primeiros resultados dos estudos sobre as estimativas que este faz sobre as probabilidades subjetivas surgiram na década de 60. Hink e Woods [HIN87] apresentam uma síntese dos principais experimentos em estimativas probabilísticas subjetivas por parte do ser humano realizados desde então.

Em 1964, Edwards e Phillips [EDW64]<sup>9</sup> realizaram uma série de experimentos com a finalidade de comparar as estimativas humanas das probabilidades modificadas por novas evidências, com as estimativas indicadas pelo modelo probabilístico. A principal constatação foi a de que o ser humano tende a conservar as probabilidades iniciais. Esta característica (*conservadorismo*) foi alvo de novas pesquisas nos anos seguintes, tal a sua relevância. Hink e Wood [HIN87] sintetizam as principais verificações destes novos experimentos. São elas :

- a tendência conservadora é menor quando o tamanho da amostra é pequeno.
- quando premiado pela precisão, o ser humano reduz o conservadorismo.
- o conservadorismo cai quando as probabilidades iniciais são extremas.
- grandes probabilidades condicionais diminuem o conservadorismo, embora mantenham constantes a razão probabilística entre evidência e hipótese (a qual é o principal problema na fórmula de Bayes).
- quando o número de objetos em cada população amostral é comparável, o conservadorismo diminui ou mesmo reverte.

---

<sup>9</sup> Os resultados dos próximos autores que estão transcritos nesta seção são comentados por Hink e Wood [HIN87]. Assim, neste trabalho os referidos artigos não foram reanalisados, razão pela qual suas referências estão colocadas ao final deste capítulo (item 3.7) e não nas referências gerais (Capítulo VIII).

A busca por uma explicação a esta tendência humana de conservar as probabilidades originou novos trabalhos. As hipóteses levantadas foram as mais diversas. Os autores Fischhoff e Beyth-Marom [FIS83] apresentaram em 1983 uma lista de 7 possíveis causas que ia desde a formulação de hipóteses inapropriadas até a interpretação errônea na análise. Hink e Wood [HIN87] afirmam que os esforços foram muitos no sentido de justificar o conservadorismo até que novas descobertas caracterizaram o fato de que o ser humano não é, de fato, bayesiano em seus julgamentos.

Esta descoberta denomina-se *A Razão Básica da Falácia*<sup>10</sup>. Enquanto o conservadorismo pode ser considerado uma tendência "suave", a *Razão Básica da Falácia* envolve o que parece ser uma total negligência às probabilidades iniciais [HIN87]. Esta característica é bem evidenciada em um exemplo apresentado por Kahneman e Tversky [KAH72] e lembrado por Hink e Wood [HIN87].

Kahneman e Tversky [KAH72] relataram o seguinte caso :

Em uma determinada cidade, duas companhias de táxis operam. Uma destas companhias possui táxis azuis (85% do total de táxis da cidade) e a outra companhia possui táxis verdes (perfazendo os demais 15% dos táxis). Em certa noite, um táxi envolveu-se em um acidente. Uma testemunha identificou o táxi como verde. A justiça testou a habilidade da testemunha em distinguir táxis azuis e verdes sob condições de visibilidade semelhantes as daquela noite. Nestes testes, a testemunha identificou corretamente a cor em 80 por cento das vezes e erroneamente nos demais 20 por cento. A pergunta natural é : *Em sua opinião, quais são as chances de que o táxi foi de fato verde, como a testemunha afirma ?*

Em suas entrevistas, a grande maioria dos entrevistados afirmou que esta probabilidade é de 80 por cento. A resposta

---

<sup>10</sup> O termo em inglês é "The Base-Rate of Fallacy" [HIN87]. Esta expressão exprime o motivo principal das falhas ou enganos (falácias) do ser humano ao raciocinar probabilisticamente.

bayesiana a esta questão é 41 por cento<sup>11</sup>. Trata-se da ocorrência da *Razão Básica da Falácia*, pois os entrevistados desprezaram as probabilidades iniciais (i.e. a *razão básica*). Esta característica foi observada em diversos contextos, tanto em pessoas leigas como em profissionais. Além disso, no caso específico da Medicina, há evidências de *falácias* tanto entre os médicos como na própria literatura médica [HIN87].

Em 1980, Tversky e Kahneman [TVE80] afirmaram que a característica evidenciada estava relacionada à causalidade. Os autores afirmam que as informações iniciais só são observadas quando se enquadram no esquema causal do problema (o que não ocorre efetivamente no caso dos táxis). Também em 1980, Bar-Hillel [BAR80] apresentou uma explicação adicional, segundo a qual as pessoas classificam as informações de acordo com sua percepção de relevância. Há a supremacia das informações mais relevantes, sendo que a determinação de cada relevância surge das especificidades de cada indivíduo.

#### 3.6.4. Probabilidade Subjetiva x Probabilidade Objetiva

Comparativamente aos modelos bayesianos, outra causa para o mau comportamento humano provém do mau julgamento (ou má-calibração) das probabilidades subjetivas. Esta característica surge quando as pessoas devem associar valores numéricos para representar o grau de confiança em suas respostas ao resolver problemas ou em tarefas de julgamento. Hink e Wood [HIN87] afirmam que uma pessoa é considerada "perfeitamente calibrada" quando sua probabilidade subjetiva iguala-se perfeitamente à probabilidade de uma resposta correta.

---

<sup>11</sup> Esta probabilidade é calculada tomando-se como espaço amostral os eventos "ser azul e a testemunha estar errada" ( $Pr = 17\%$ ) e "ser verde e a testemunha estar certa" ( $Pr = 12\%$ ). A probabilidade de a testemunha estar certa é:  $Pr(C/A) = 0.12 / (0.12 + 0.17) = 41.4\%$ .

Os estudos de Lichtenstein e Fishoff [LIC77] (figura 3-5) revelam o interessante fato de que os julgamentos são superestimados em casos de baixas probabilidades objetivas e subestimados para altas probabilidades objetivas. Em 1982, estes dois autores juntamente com Phillips [LIC82] constataram ainda que a tendência de superestimar a confiança diminui em tarefas fáceis e que os especialistas tendem a mostrar menor tendência que os não-especialistas.

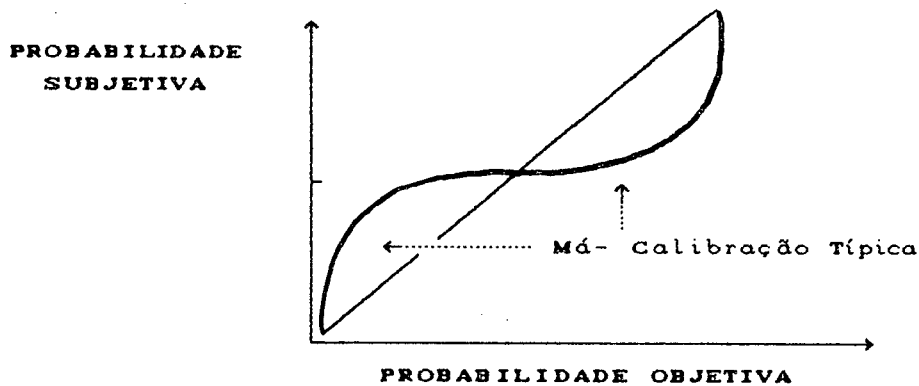


FIGURA 3-5 : Má-Calibração de Probabilidades - FONTE [HIN87].

Estas má-calibrações das probabilidades subjetivas encontram explicações em variáveis psicológicas [HIN87]. Zakay [ZAK83] observou que, em avaliações de eventos positivos, as probabilidades subjetivas são mais elevadas nos casos em que os eventos descritos poderiam afetar pessoalmente o avaliador mais do que a uma pessoa desconhecida. Em eventos negativos, Zakay observou o contrário. Estudos neste sentido (Phillips e Edwards [PHI66]) demonstraram que as avaliações subjetivas são afetadas pelos custos envolvidos. Exemplificando : as avaliações das probabilidades de diagnósticos feitas por médicos são afetadas pela gravidade das conseqüências do tratamento (Betaque e Gorry [BET71]); em tarefas competitivas que requerem experiência, as pessoas apresentam a tendência de superestimar suas habilidades (probabilidade subjetiva de sucesso) (Howell [HOW72]).

Outra questão que surge naturalmente na comparação entre as probabilidades subjetiva e objetiva relaciona-se às suas

propriedades. Vários autores preocuparam-se em saber se as probabilidades subjetivas guardam as mesmas propriedades das objetivas.

Um primeiro ponto discutido é a regra probabilística de que a soma das probabilidades em um conjunto de eventos mutuamente exclusivos deve ser igual a 1. Hink e Wood [HIN87] revisam os principais resultados lembrando que características diferentes surgem com diferentes tamanhos de amostra e diferentes entrevistados (por faixa etária). Enquanto para crianças os resultados dependem do tamanho da amostra (em amostras pequenas excede a 1 e em grandes é menor que 1), para os adultos a soma iguala-se a 1 de forma inconsistente.

Uma segunda regra probabilística que preocupa os pesquisadores quanto às probabilidades subjetivas é a da união multiplicativa de eventos independentes ( $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ). Os resultados experimentais demonstram que as probabilidades de eventos independentes não são multiplicadas na determinação da probabilidade do evento conjunto [HIN87]. Cohen, Hansel e Dearnaley [COH58a] e [COH58b] afirmam que a probabilidade subjetiva do evento conjunto é muito alta. Isto foi exemplificado novamente por Tversky e Kahneman [TVE83] em um estudo de 1983 no qual 72% de seus entrevistados afirmaram que a probabilidade de "Bjorn Borg perder o 1º set mas vencer o match" é maior do que "Bjorn Borg perder o 1º set". Aparentemente, os entrevistados basearam-se mais no que sabem sobre Borg do que sabem sobre a Teoria da Probabilidade [HIN87].

Também é alvo de pesquisas nesta área o julgamento de parâmetros estatísticos pelo ser humano. Estes estudos denotam que há uma correlação intuitiva entre os julgamentos subjetivos de média e variância. Em Inteligência Artificial, no entanto, estimativas sobre parâmetros estatísticos não parecem ser muito freqüentes nos problemas encontrados.

### 3.6.5. Heurísticas nas Avaliações Probabilísticas

Estudos têm comprovado que o ser humano adota determinadas heurísticas ao fazer estimativas probabilísticas de suas crenças. Estas heurísticas, por sua vez, podem levar a inconsistências que comprometem o significado probabilístico das estimativas.

Durante o processo de aquisição do conhecimento, o construtor de um sistema especialista deve estar ciente da existência de tais heurísticas, possivelmente presentes nas estimativas de crença do perito. Nesta seção, apresenta-se um resumo das principais tendenciosidades humanas em avaliações probabilísticas, com o objetivo de facilitar a identificação e correção destas tendências em futuras implementações.

Segundo Hink e Woods [HIN87], os principais pesquisadores da subjetividade humana ao estimar probabilidades foram Tversky e Kahneman. Em seus trabalhos, Tversky e Kahneman ([TVE71], [TVE73], [TVE74], [TVE80], [TVE83], [KAH72a], [KAH72b], [KAH73] e [KAH82b]) apresentaram importantes ferramentas que permitiram ampliar as discussões sobre esta questão. A seguir, retoma-se os principais resultados reportados em [HIN87].

#### 3.6.5.a. Representatividade

Uma das heurísticas observadas por estes autores foi a *Representatividade*, segundo a qual, um objeto de mais alta probabilidade tipifica uma classe. Apesar de seu caráter plausível, Tversky e Kahneman fundamentam determinadas falácias das estimativas humanas na representatividade.

#### 3.6.5.b. A Desconsideração do Espaço Amostral

Segundo Hink e Woods [HIN87], outra importante observação de Kahneman e Tversky foi a inatenção do ser humano ao tamanho do espaço amostral. Hink e Woods exemplificam afirmando que, diante do questionamento sobre a probabilidade de haver mais do que 60% de nascimentos de meninos em um hospital pequeno (15



nascimentos por dia) ou em um hospital grande (45 nascimentos por dia), a maioria das pessoas apresenta a mesma resposta. Entretanto, a probabilidade deveria ser maior em hospitais menores, devido à maior variabilidade dos resultados, em função de seu menor tamanho amostral (e.g. em um hospital com 1 nascimento por dia, a probabilidade deveria ser próxima de 50%). A Representatividade sugere que as pessoas ignoram o tamanho da amostra porque concentram-se na relação entre o parâmetro amostral e o correspondente parâmetro da população [HIN87].

#### 3.6.5.c. A Brevidade em Estimativas Randômicas

Devido à Representatividade, as pessoas esperam que o comportamento randômico seja semelhante tanto no longo como no curto prazo. Assim, quando deve gerar seqüências randômicas, o ser humano tende a ser breve, produzindo pequenas cadeias numéricas. Isto explica o equívoco do jogador que acredita que o término de uma longa seqüência é um evento previsível.

#### 3.6.5.d. A Superestimativação em Previsões

Kahneman e Tversky observaram a tendência humana de superestimar suas previsões [HIN87]. Este efeito novamente encontra explicação na Representatividade, já que esta controla tanto a previsão como sua confiança associada. Geralmente, as previsões superestimadas se dão sem função de informações redundantes, o que é contrário à Teoria Estatística.

#### 3.6.5.e. A Avaliabilidade

Uma segunda heurística observada por Kahneman e Tversky foi denominada *Avaliabilidade*. Segundo esta heurística, informações mais facilmente acessíveis têm probabilidade maior do que informações de acesso mais dificultado. Embora isto se verifique em geral ([HIN87]), há outros fatores tão relevantes quanto a facilidade de acesso. Assim, esta heurística pode causar inconsistências e erros nas estimativas. Como exemplo, Hink e

Woods citam que a maioria das pessoas julgam que há mais palavras inglesas que iniciam com as letras R e K do que palavras com consoantes na terceira letra. Apesar de isto não ser verdade, é mais fácil acessar o primeiro tipo de palavras do que o segundo.

#### 3.6.5.f. Os Ajustes e a Ancoragem

Este terceiro tipo de heurística observado por Kahneman e Tversky trata-se de estimar ou computar um ponto inicial e, então, fazer ajustes no mesmo. A princípio, esta heurística parece razoável, já que os procedimentos de atualização na Teoria Bayesiana seguem o paradigma do ajuste e ancoragem. Contudo, como observado anteriormente, o ser humano tende a ser conservador em suas estimativas [HIN87].

#### 3.6.6. Como Evitar as Inconsistências nas Avaliações Probabilísticas

Em função das heurísticas anteriormente descritas, a comparação do comportamento de estimativas subjetivas frente a modelos tem demonstrado claramente que o ser humano não raciocina de acordo com os mesmos e não tem entendimento intuitivo sobre processo estocástico [HIN87]. Assim, cabe ao engenheiro de conhecimento diminuir ao máximo as possíveis inconsistências das estimativas do perito. Hink e Woods [HIN87] sugerem uma série de métodos para auxiliar o engenheiro de conhecimento nesta tarefa.

Segundo Hink e Woods [HIN87], embora minimizáveis, as falhas humanas em estimativas probabilísticas são inevitáveis. Assim, os autores sugerem que a melhor maneira de reduzir estes efeitos é evitando-se o uso de probabilidades ou estimativas estatísticas por parte do especialista, tanto quanto possível. Evidentemente, no entanto, quando os dados necessários estão disponíveis, devem ser utilizados. Quando não estão, pode-se tomar as estimativas subjetivas do especialista, considerando-se determinadas precauções.

No caso de se efetivarem os levantamentos subjetivos, o problema consiste em minimizar as má-calibrações. Uma primeira alternativa consiste no treinamento do especialista, de modo que ele pudesse fazer melhores avaliações ([LIC80]). Outra técnica é explicitar claramente as razões que fundamentam uma estimativa do especialista, questionando sobre por que o evento em questão deve ou não ocorrer ([FIS82]). Deste modo, pode-se levar o especialista a considerar diretamente eventos cenários, evidências ou possibilidades, reduzindo as chances de estimativas super-estimadas [HIN87]. Hink e Woods [HIN87] alertam para o fato de que, qualquer que seja o método, o engenheiro de conhecimento nunca deveria conduzir os questionamentos, sob pena de incluir no modelo suas próprias tendências.

#### 3.6.6.a. O Método de Spetzer e Steal von Holstein

Em 1975, Spetzer e Steal von Holstein [SPE75] apresentaram um método para as entrevistas junto a especialistas, de modo que as tendenciosidades fossem reduzidas. O método consiste de cinco fases distintas, a saber :

##### 3.6.6.a1. *Motivação*

Esta fase apresenta dois propósitos : familiarizar o especialista com os procedimentos e mostrar-lhe a importância do descobrimento de qualquer tendenciosidade relacionada ao processo, bem como qualquer estrutura de recompensa implícita associada a suas respostas [HIN87].

##### 3.6.6.a2. *Estruturação*

Nesta fase, procede-se a definição e a estruturação das quantidades incertas. O objetivo consiste em eliminar possíveis ambigüidades, de forma que o especialista saiba exatamente o que está sendo acessado. Deve-se encorajar o especialista a identificar o que é relevante na tarefa [HIN87].

##### 3.6.6.a3. *Condicionamento*

Nesta etapa, leva-se o especialista a uma redução das possíveis tendenciosidades. Pede-se que ele justifique suas respostas, tanto em termos das informações explícitas dadas pelo engenheiro de conhecimento como das informações implícitas. O engenheiro de conhecimento deve estar alerta para sinais de Representatividade e Avaliabilidade nestas justificativas. Em

ambos os casos, deve-se questionar o especialista sobre outras possibilidades que podem influenciar as estimativas, mas que não estão mencionadas no momento [HIN87].

#### 3.6.6.a4. Codificação

Nesta fase, o especialista faz estimativas. Hink e Woods [HIN87] salientam os cuidados que devem ser tomados quanto a estas estimativas, quando se está utilizando a Probabilidade. Segundo os autores, cada quantidade estimada deve ser randomicamente selecionada, a fim de evitar efeitos de ordenações ou conduções. Nestes casos, a distribuição de probabilidades gerada das respostas pode conter inconsistências ou *gap* nos dados.

#### 3.6.6.a5. Verificação

Providencia-se um retorno ao especialista, mostrando-lhe a distribuição acumulada para seus comentários. Se ele mostrar-se insatisfeito com os resultados, pode-se repetir o procedimento. Além disso, pode-se fazer a verificação construindo pares de apostas oferecidos ao especialista, que deve expressar uma preferência. Seguindo-se este método, pode-se checar a consistência dos dados [HIN87].

O importante para o engenheiro de conhecimento é estar ciente de que a tomada de decisão que o ser humano faz sob incerteza é confusa. Por um lado, o ser humano parece ter bom senso ao avaliar riscos. Por outro lado, no entanto, os tomadores de decisão parecem jogar inconsistente e sub-otimamente [HIN87].

Cabe ao engenheiro de conhecimento reconhecer se as inconsistências eventualmente identificadas nas decisões tomadas pelo especialista são reais ou meramente frutos de uma má-articulação na resolução do problema. Quando forem reais, o construtor de sistema especialista deve detalhar as justificativas do perito para cada decisão tomada. Hink e Woods [HIN87] propõem a reestruturação do conhecimento através de questionamentos sobre possíveis variações nas decisões consideradas. Os autores salientam ainda que o engenheiro de conhecimento deve estar precavido contra possíveis *confabulações*, ou seja, explicações fabricadas para eventos ou procedimentos que parecem fugir a uma explicação racional, a fim de cobrir uma falha ou fragilidade.

## CAPÍTULO IV

### TEORIA DOS FATORES DE CERTEZA

#### 4.1. INTRODUÇÃO

Os trabalhos pioneiros no tratamento de incerteza em sistemas especialistas surgiram quando da confecção dos sistemas MYCIN, em 1976 e PROSPECTOR, em 1979. No primeiro, seus mentores Richard Duda, Edward Shortliffe, Bruce Buchanan, J. L. Alty e R. Davis trataram a incerteza pelo que denominaram *Fatores de Certeza*. Estes pesquisadores justificaram a necessidade de se abordar esta questão do seguinte modo :

*"Quando iniciamos o desenvolvimento das primeiras poucas regras para MYCIN tornou-se claro que as regras que obtivemos de nossos especialistas colaboradores diferenciavam-se das regras de situação-ação de DENDRAL de um importante modo - as interfaces descritas eram geralmente incertas. (...). Parecia claro que necessitávamos manusear proposições probabilísticas em nossas regras e desenvolver um mecanismo para reunir evidências a favor e contra uma hipótese quando duas ou mais regras relevantes fossem sucessivamente executadas."*  
[BUC84]

A princípio, esta linha de raciocínio parece indicar a adoção da técnica tradicional de combinação de evidências, a regra (ou Teorema) de Bayes, como os próprios autores reconhecem ([BUC84]). Contudo, esta estratégia levaria a problemas com suposições sobre a independência estatística e as probabilidades iniciais. A aplicação de um novo cálculo de valores de certeza, embora com um significado operacional dos números computados nem sempre claro, evitou estes problemas [DUD83]. A estrutura da base de conhecimento em MYCIN foi construída de um modo tal que as dependências entre as regras de inferência fossem removidas [COH85].

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão da técnica dos Fatores de Certeza. Inicialmente, aborda-se os fundamentos teóricos que embasaram os estudos dos Fatores de Certeza, para,

posteriormente abordar a técnica propriamente. Ao final, discute-se os aspectos relativos à implementação computacional dos Fatores de Certeza.

#### 4.2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS - TEORIA DA CONFIRMAÇÃO

Os fundamentos filosóficos que embasaram a adoção de Fatores de Certeza (FC) no sistema MYCIN encontram-se detalhados no trabalho de Buchanan e Shortliffe [BUC84]. Os Fatores de Certeza estão baseados na *Teoria da Confirmação*, onde o direcionamento teórico para medir o grau de incerteza de uma afirmação vem da *confirmação* que uma evidência  $e$  faz a uma hipótese  $h$ .

Uma das questões freqüentemente levantada a respeito dos Fatores de Certeza é a sua semelhança com a Probabilidade, o que é melhor elucidado quando se estuda a Teoria da Confirmação. Os resultados provenientes desta teoria caracterizam o fato de que o grau de confirmação da hipótese  $h$ , com base na evidência  $e$ , ( $C[h,e]$ ), é diferente da probabilidade de ocorrência da hipótese  $h$  baseando-se em  $e$ , ( $P(h/e)$ ). Buchanan e Shortliffe [BUC84] ilustram esta diferença tomando as hipóteses  $h_1$ , "todos os corvos são pretos" e  $h_2$ , "todas as coisas não pretas não são corvos". Estas hipóteses evidenciam que  $C[h_1,e] = C[h_2,e]$  para qualquer  $e$ . Contudo, é contra-intuitivo afirmar que um vaso verde apoie  $h_1$ , embora pareça apoiar  $h_2$ . Isto evidencia que  $C[h,e]$  é diferente de  $P(h/e)$ .

Em reforço a esta diferenciação entre confirmação e probabilidade condicional, tem-se o fato de ser contra-intuitivo sugerir que o grau de confirmação da negação de uma hipótese é 1 menos o grau da confirmação desta hipótese. Esta característica torna separável o tratamento reservado à disconfirmação, introduzindo o *grau de disconfirmação* ( $D$ ) que também possui similar no tratamento por Fatores de Certeza.

Como salientam Buchanan e Shortliffe [BUC84], a Lógica da Confirmação possui algumas propriedades que têm intrigado alguns pesquisadores. Salmon, por exemplo, analisou a Lógica da Confirmação em hipóteses científicas, o que levou à conclusão que a estrutura de tais procedimentos é melhor expressa pelo Teorema de Bayes e a interpretação freqüencial da probabilidade. Contudo, Buchanan e Shortliffe [BUC84] afirmam que o modelo em MYCIN não se propõe a oferecer uma solução às questões teóricas com as quais Salmon preocupou-se. Os autores abandonaram o Teorema de Bayes e a função- $P^{12}$  simplesmente porque :

*"existem áreas do conhecimento especializado e intuição que, embora tratáveis em teoria por análise freqüencial de probabilidade estatística, provocam rigorosas análises, devido à insuficiência de dados e, no sentido prático, devido aos especialistas resistirem em expressar seu processo de raciocínio em termos probabilísticos coerentes" [BUC84].*

A seguir apresenta-se os conceitos presentes na Teoria dos Fatores de Certeza, propriamente.

#### 4.3. O MODELO DA TEORIA DOS FATORES DE CERTEZA

Embora com muitas similaridades com a Teoria da Confirmação, o modelo dos Fatores de Certeza introduziu novos

---

<sup>12</sup> A função- $P$  da Probabilidade Tradicional é um conceito direto da Estatística elementar definido de várias formas. Parzen, em 1960, sugeriu um conjunto de definições teóricas: dada uma situação randômica que é descrita por um espaço amostral  $S$ , probabilidade é uma função  $P$  que, para qualquer evento associa um número real não-negativo, denotado  $P(e)$  e chamado "probabilidade do evento  $e$ ". A função de probabilidade deve satisfazer 3 axiomas:

Axioma I :  $P(e) \geq 0$  para  $\forall$  evento  $e$

Axioma II :  $P(S) = 1$  para certos elementos  $S$ .

Axioma III:  $P(e \cup f) = P(e) + P(f)$  se  $e \cdot f = 0$  ou, em palavras, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos é a soma de suas probabilidades.

conceitos para medir a extensão evidencial. Os autores escolheram os termos *crença* e *descrença* para as medidas adotadas, sendo que a necessidade de dois parâmetros é oriunda da similaridade com as medidas de confirmação e desconfirmação [BUC84]. As notações e significados para estas medidas são :

- $MC[h,e] = x \rightarrow$  significa "a medida do crescimento na crença na hipótese  $h$ , baseando-se na evidência  $e$ , é  $x$ ".
- $MD[h,e] = y \rightarrow$  significa "a medida do crescimento na descrença na hipótese  $h$ , baseando-se na evidência  $e$ , é  $y$ ".

Analogamente ao que ocorre no Raciocínio Bayesiano, na Teoria da Confirmação a evidência  $e$  não é necessariamente um evento observado, podendo ser uma hipótese (também sujeita à confirmação). Neste caso,  $MC[h_1,h_2]$  indicaria a medida do crescimento da crença na hipótese  $h_1$  dado que a hipótese  $h_2$  é verdadeira. Analogamente,  $MD[h_1,h_2]$  indicaria a medida do crescimento da descrença na hipótese  $h_1$  dado que a hipótese  $h_2$  é verdadeira [BUC84].

Ilustrativamente, Buchanan e Shortliffe [BUC84] consideram uma das regras em MYCIN com a evidência  $e =$  "o organismo é um *coccus gram-positivo* crescendo na cadeia" e a hipótese  $h =$  "o organismo é um *Streptococcus*". Exemplifica-se os conceitos tomando-se  $MC[h,e] = 0.7$ , número surgido das apreciações do especialista. Este número reflete a extensão para a qual a crença do especialista de que  $h$  é verdadeira é aumentada pelo conhecimento de que  $e$  é verdade [BUC84]. Neste exemplo,  $MD[h,e] = 0$ , indicando que o especialista não tem razão para aumentar sua descrença em  $h$  com base em  $e$ .

A determinação dos fatores MC e MD está relacionada com as probabilidades subjetivas envolvidas no conhecimento dos especialistas sobre como cada hipótese  $h$  relaciona-se com cada evidência  $e$ . Segundo a probabilidade subjetiva, a probabilidade



pessoal do especialista,  $P(h)$ , reflete sua crença em  $h$  em um dado momento qualquer. A descrença em considerar a verdade  $h$  pode ser medida por  $1 - P(h)$ . Quando  $P(h/e)$  é maior que  $P(h)$ , a observação de  $e$  aumenta a crença do especialista em  $h$ , ao mesmo tempo que decrementa a descrença em considerar a verdade de  $h$  [BUC84]. Desta forma, pode-se ter a relação que fornece o decrescimento proporcional na descrença :

$$(4.1) \quad \frac{P(h/e) - P(h)}{1 - P(h)}$$

Chama-se esta razão de medida do crescimento na crença em  $h$  resultante da observação de  $e$ , ou, de acordo com o que se definiu anteriormente,  $MC[h,e]$ .

Uma segunda situação surge quando  $P(h/e)$  é menor que  $P(h)$ . Disso conclui-se que a observação da evidência  $e$  diminui a crença do especialista na hipótese  $h$ , enquanto aumenta sua descrença em considerar a verdade  $h$ . Analogamente, este decrescimento proporcional na crença é dado pela seguinte razão ([BUC84]):

$$(4.2) \quad \frac{P(h) - P(h/e)}{P(h)}$$

Esta relação é a medida do crescimento na descrença em  $h$  resultante da observação de  $e$ , ou, simplesmente,  $MD[h,e]$ .

Buchanan e Shortliffe [BUC84] resumem estes resultados em palavras :

- $MC[h,e]$  é medido pela proporção do decrescimento na descrença em considerar a hipótese  $h$  resultante da observação da evidência  $e$ .
- $MD[h,e]$  é medido pela proporção do decrescimento na crença em considerar a hipótese  $h$  resultante da observação da evidência  $e$ .

sendo que a crença é estimada por  $P(h)$  em qualquer momento e a descrença por  $1 - P(h)$ . Os autores salientam o fato de que estas definições estão intuitivamente relacionadas à confirmação e desconfirmação na Teoria da Confirmação. Além disso, desde que uma

evidência parcial não pode ser tanto favorável como desfavorável a uma hipótese, tem-se que, quando  $MC[h,e] > 0$ ,  $MD[h,e] = 0$  e vice-versa. Outra conclusão surgida das expressões acima é que quando  $P(h) = P(h/e)$ ,  $MC[h,e] = MD[h,e] = 0$ , ou seja, a evidência e nem confirma nem desconfirma  $h$ .

Com a intenção de destacar a simetria entre  $MC$  e  $MD$ , as definições formais destas medidas estão em forma diferente das expressões anteriores, sendo igualmente colocadas em termos de probabilidades condicionais e iniciais, como a seguir.

$$MC[h,e] = \begin{cases} 1 & \text{se } P(h) = 1 \\ \frac{\max [P(h/e), P(h)] - P(h)}{\max [1,0] - P(h)} & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Expressão (4-3) : Definição formal da Medida de Crença

$$MD[h,e] = \begin{cases} 1 & \text{se } P(h) = 0 \\ \frac{\min [P(h/e), P(h)] - P(h)}{\min [1,0] - P(h)} & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Expressão (4-4) : Definição formal da Medida de Des crença

#### 4.3.1. Uma Analogia Com Distância Relativa

Bonissone [BON87] apresenta interessante analogia para ilustrar as medidas de crença ( $MC$ ) e descrença ( $MD$ ). Pode-se interpretar  $MC$  e  $MD$  como sendo as distâncias relativas em um intervalo limitado  $[A,B]$ .

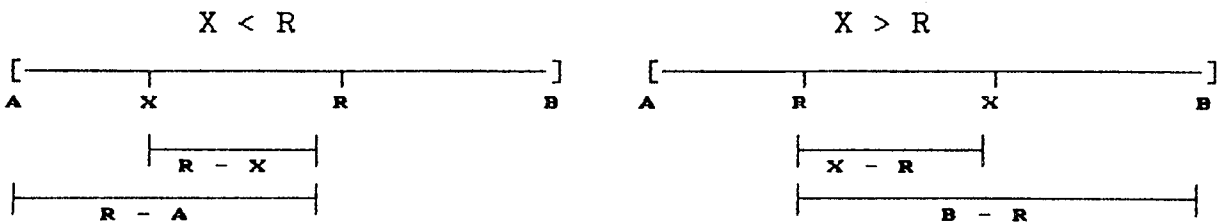


FIGURA 4-1 : Ilustração do Significado das Medidas de Crença.

Tomando-se um ponto de referência  $R$  e um ponto qualquer  $X$ , ambos dentro do intervalo, a distância relativa entre os dois

pode ser definida como :

$$d(X, R) = \begin{cases} (X - R)/(B - R) & \text{se } X > R \\ 0 & \text{se } X = R \\ (R - X)/(R - A) & \text{se } X < R \end{cases}$$

Fazendo-se as substituições :

$$A = 0, B = 1, R = P(h) \text{ e } X = P(h/e),$$

tem-se as definições anteriores.

#### 4.3.2. A Medida do Fator de Certeza

A medida do Fator de Certeza, propriamente dito, é resultante de uma combinação dos fatores MC e MD anteriores, explicitamente :

$$(4.5) \quad FC[h, e] = MC[h, e] - MD[h, e]$$

O fator de certeza FC permite maior facilidade nas comparações entre extensão evidencial de duas hipóteses conflitantes, constituindo-se, na verdade, em um artifício para combinar os graus de crença e descrença em um único número [BUC84].

#### 4.3.3. Interpretação do Fator de Certeza FC

Originalmente, o Fator de Certeza FC foi interpretado como sendo o incremento ou decremento relativo às probabilidades [BON87]. Isto pode ser visualizado quando se compara as expressões (4.1) e (4.2) com (4.5), resultando em :

$$(4.6) \quad P(h/e) = P(h) + FC[h, e] \cdot [1 - P(h)] \text{ para } FC[h, e] \geq 0$$

$$(4.7) \quad P(h/e) = P(h) - |FC[h, e]| \cdot P(h) \text{ para } FC[h, e] \leq 0$$

Segundo Bonissone [BON87], a interpretação de FC como absoluto ao invés de incremental tem sido um dos equívocos cometidos em sistemas de raciocínio. Como poder-se-á verificar posteriormente, a implementação computacional em MYCIN pressupõe a

utilização de funções de combinação heurísticas e isso não mais preserva esta interpretação de FC como taxa probabilística.

#### 4.3.4. Características das Medidas de Crença

A seguir apresenta-se as características das medidas de crença MC, descrença, MD e Fator de Certeza, FC.

##### 4.3.4.a. Domínios de Definição para os Graus

$$a1. 0 \leq MC [h,e] \leq 1$$

$$a2. 0 \leq MD [h,e] \leq 1$$

$$a3. -1 \leq FC [h,e] \leq 1$$

##### 4.3.4.b. Extensão Evidencial e as Hipóteses de Mútua-exclusividade entre as Hipóteses

##### 4.3.4.b1. Se $h$ for um Evento Certo ( $P(h/e) = 1$ )

$$I. MC [h,e] = (1 - P(h))/(1 - P(h)) = 1$$

$$II. MD = 0$$

$$III. FC [h,e] = 1$$

##### 4.3.4.b2. Se a Negação de $h$ é um Evento Certo ( $P(-h/e) = 1$ )

$$I. MC [h,e] = 0$$

$$II. MD [h,e] = (0 - P(h))/(0 - P(h)) = 1$$

$$III. FC [h,e] = -1$$

#### 4.3.5. O Paradoxo da Crença

Uma das questões que intrigavam os estatísticos com relação à Teoria da Confirmação era o fato de que  $C [h,e] \neq 1 - C [-h,e]$ , ou seja, embora uma evidência possa apoiar  $h$  com grau  $x$ , ela não apoia a negação de  $h$  com grau  $-x$ . Em termos de Fator de Certeza, isto pode ser colocado da seguinte forma :

$$FC [h,e] + FC [-h,e] \neq 1$$

É interessante verificar que resultados são obtidos para o caso em que a hipótese  $h$ , dado a evidência  $e$ , constitui-se em um evento certo. Neste caso,  $FC [h,e] = 1$  e  $MC [-h,e] = 0$ .

A intuição em FC é verificada analisando-se :

$$\begin{aligned}
 FC [-h,e] &= MC [-h,e] - MD [-h,e] \\
 &= 0 - \frac{P(-h) - P(-h/e)}{P(h)} \\
 &= \frac{P(-h/e) - P(-h)}{P(-h)} \\
 &= \frac{[1 - P(h/e)] - [1 - P(h)]}{[1 - P(h)]} \\
 &= \frac{P(h) - P(h/e)}{[1 - P(h)]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 FC [h,e] &= MC [h,e] - MD [h,e] \\
 &= \frac{P(h/e) - P(h)}{1 - P(h)} - 0
 \end{aligned}$$

Assim,

$$FC [h,e] + FC [-h,e] = \frac{P(h/e) - P(h)}{1 - P(h)} + \frac{P(h) - P(h/e)}{1 - P(h)}$$

Resultando em :

$$(4-8) \quad FC [h,e] + FC [-h,e] = 0$$

Obviamente, como salientam Buchanan e Shortliffe [BUC84], este resultado ocorre porque  $MC [h,e] \neq MD [-h,e]$ , para qualquer  $h$  e  $e$ . O resultado anterior possui consistência intuitiva no sentido de que uma evidência apoia uma hipótese  $h$  com a mesma extensão com que refuta a negação de  $h$ .

#### 4.3.6. A Plausibilidade dos Fatores de Certeza

Uma comparação adicional dos Fatores de Certeza à Teoria da Probabilidade parece indicar mais uma consistência em seus fundamentos intuitivos. Quando uma crença inicial em uma hipótese é pequena ( $P(h)$  próximo a zero), o fator de certeza FC confirmado por evidência é aproximadamente igual à probabilidade condicional nesta evidência [BUC84] :

$$(4-9) \quad FC[h,e] = MC[h,e] - MD[h,e] = \frac{P(h/e) - P(h)}{1 - P(h)} - 0 \approx P(h/e)$$

Os autores baseiam-se nestas observações para acreditarem na plausibilidade dos Fatores de Certeza como representação dos números dados pelo especialista em relação à extensão de seus julgamentos nas regras. Fatores de certeza positivos indicam a confirmação da hipótese pela evidência observada. Fatores de certeza negativos indicam que a evidência leva a crer na negação da hipótese, enquanto que um FC nulo indica a independência entre a evidência observada e a hipótese considerada.

Outra questão ressaltada pelos autores é a dificuldade dos especialistas em indicar  $P(h)$  e  $P(h/e)$ . Além da própria relutância em descrever sua incerteza em modo não-usual à sua manipulação, há o agravante do número potencialmente grande de avaliações. Como salienta Hall [HAL86], se em uma determinada hipótese  $h$ ,  $m$  evidências fossem consideradas, o número de avaliações probabilísticas exigiria  $2^m$  probabilidades condicionais diferentes ( $P(h/e_i)$  para  $i = 1, \dots, m$ ). Multiplicando-se este número potencialmente grande pelo número de hipóteses diferentes e adicionando-se todas as probabilidades iniciais ( $P(h)$ ), o número resultante pode chegar a um valor excessivo de avaliações<sup>13</sup>.

Desta forma, os fatores de certeza parecem ser geralmente mais intuitivos (pois sintetizam  $P(h)$  e  $P(h/e)$  problemáticos aos especialistas em um único número - [BUC84]) e construtivamente mais interessantes ([HAL86]).

<sup>13</sup> A complexidade dos Métodos Bayesianos também está tratada no Capítulo 3, no item 3.3.2.

A verificação da plausibilidade dos fatores FC deve necessariamente considerar a hipótese da irracionalidade nos julgamentos dos especialistas, ou seja, a possibilidade de que suas avaliações levem a ações ou decisões que contradizem os seus resultados obtidos sob análise probabilística. Por exemplo, no caso de  $n$  hipóteses mutuamente exclusivas, deve-se ter  $\sum_n P(h/e_i) = 1$  para todo  $e$ . Isto limita a soma dos FC's de hipóteses mutuamente exclusivas. As regras adquiridas junto aos especialistas devem respeitar estes limites, de modo a evitar julgamentos quantitativos irracionais [BUC84]. A seguir, verifica-se este aspecto na Teoria dos Fatores de Certeza.

#### 4.3.7. Consistências dos FC em Hipóteses Mutuamente Exclusivas

Um dos mecanismos de análise da consistência dos julgamentos do especialista em relação aos Fatores de Certeza consiste na verificação dos limites em hipóteses mutuamente exclusivas (m.e). Considerando um conjunto de  $n$  hipóteses  $h_i$  m.e., evidentemente, a observação de uma evidência  $e$  impõe um limite inferior à soma dos FC  $[h_i, e]$ , uma vez que  $FC [h_i, e] \geq -1$ . Como exemplo ([BUC84]), sugere-se o conjunto de  $n$  hipóteses  $h_i$ , onde :

$C$  = conjunto de cores  $C_i$  com  $i = 1$  a  $n$   
 $h_i$  = "todos os corvos têm cor  $C_i$ "  
 $h_0$  = "alguns corvos têm cor diferente dos outros"

Agora, considerando uma evidência  $e$ , dada por :

$e$  = "existe um corvo com cor  $C_0$ "

então, para todo  $i \neq 0, n$ ,  $FC[h_i, e] = -1$ , levando à expressão

$$\sum_{i=1}^{n-1} FC [h_i, e] = -(n-1).$$

Genericamente, esta análise impõe um limite inferior para a afirmação de que  $k$  hipóteses mutuamente exclusivas são disconfirmadas pela evidência  $e$  :

$$\sum_1^k FC [h_i, e] \geq -k \text{ [para } h_i \text{ disconfirmado por } e]$$

Com relação ao exemplo anterior, restam as hipóteses  $h_1$  e  $h_2$  para se considerar. São hipóteses m.e. não disconfirmadas pela evidência  $e$ . O que se pode afirmar com relação a  $FC [h_1, e]$  e  $FC [h_2, e]$  ou à soma de ambos ? Buchanan e Shortliffe [BUC84] afirmam que o limite superior à soma de  $k$  hipóteses mutuamente exclusivas não-disconfirmadas por uma evidência  $e$  não é  $k$  e sim :  $\sum_k FC[h_i, e] \leq 1$ , para  $h_i$  confirmado (ou não-disconfirmado) por  $e$

De fato,  $\sum_k FC [h_i, e]$  é igual a 1 se e somente se  $k = 1$  e a evidência  $e$  implica em  $h_i$  com certeza. Entretanto, a soma pode ser arbitrariamente próxima a 1 para um pequeno  $k$  e  $n$  grande [BUC84].

A importância dos limites superior e inferior anteriores está na verificação da consistência dos Fatores de Certeza fornecidos pelo especialista. Uma ilustração a este fato é fornecida por Buchanan e Shortliffe [BUC84]. Dadas as seguintes hipóteses :

$h_1$  = "O organismo é um *Staphylococcus*" e  
 $h_2$  = "O organismo é um *Streptococcus*"

tem-se que elas são claramente mutuamente exclusivas. Agora, dada a seguinte evidência  $e$  :

$e$  = "O organismo é um *coccus* gram-positivo crescente na cadeia".

Imaginando-se que o especialista, analisando  $h_1$ ,  $h_2$  e  $e$ , forneceu os seguintes valores para os FC's envolvidos :

$$FC [h_1, e] = 0.7 \text{ e } FC [h_2, e] = 0.4$$

Nota-se que  $\sum FC [h_i, e] > 1$ , sugerindo que os Fatores de Certeza são inapropriados. O especialista deve ajustar os pesos ou normalizá-los, de modo que a soma não exceda a 1, caso contrário, os resultados oriundos destas regras seriam irracionais [BUC84].



#### 4.3.8. Os Fatores de Certeza Aplicados Ao Diagnóstico Médico

Os autores do sistema MYCIN detectaram certas características no mecanismo de diagnóstico médico que levaram à adoção de convenções para a utilização do modelo de Fatores de Certeza.

Inicialmente, uma breve discussão sobre as características do diagnóstico médico é relevante. Supondo que  $d_i$  caracterize o  $i$ -ésimo diagnóstico (ou "doença") em consideração, para um especialista concluir  $d_i$ , o número de evidências necessárias é incremental, ou seja, o diagnóstico é seqüencial [BUC84]. Esta característica exige uma adaptação à Regra de Bayes.

*"Dado  $e_1$  o conjunto de todas as observações consideradas e  $s_1$  uma nova informação aos dados: Assim, dado  $e$  o novo conjunto de observações quando  $s_1$  é adicionado a  $e_1$ , tem-se : [BUC84]"*

$$(4-10) \quad P(d_i/e) = \frac{P(s_1/d_i \& e_1) \cdot P(d_i/e_1)}{\sum P(s_1/d_j \& e_1) \cdot P(d_j/e_1)}$$

Uma variedade de considerações ([BUC84], [HAL86], [COH85], [HEN88], [BON87], etc.) refutam a utilização desta expressão em problemas práticos, fundamentalmente devido às inter-relações entre os  $s_k$  em cada doença  $d_j$  e à enorme dificuldade em traduzir os arquivos hospitalares em combinações freqüenciais de sintomas e doenças.

Isto posto, resta o problema de como o diagnóstico seqüencial foi abordado em MYCIN. Buchanan e Shortliffe [BUC84] sintetizam esta questão :

*"Supõe-se que  $MC[d_i, s_k]$  seja conhecido para cada  $s_k$ , bem como  $MD[d_i, s_k]$ , sendo que a conjunção de todos  $s_k$  é representada por  $e$ . Assim, o objetivo é calcular  $FC[d_i, e]$  a partir dos  $MC$ 's e  $MD$ 's conhecidos para os  $s_k$ 's individuais."*

A fim de se prosseguir a exposição do mecanismo em MYCIN, supõe-se que a evidência total seja uma função de duas partes  $s_k$ , ou,  $e = s_1 \& s_2$ , a qual confirma  $d_i$ . Então [BUC84] :

$$\begin{aligned} FC[d_i, e] &= MC[d_i, e] - 0 = \frac{P(d_i/e) - P(d_i)}{1 - P(d_i)} \\ (4-11) \qquad &= \frac{P(d_i/s_1 \& s_2) - P(d_i)}{1 - P(d_i)} \end{aligned}$$

Ao contrário do que se podia esperar, como salientam Buchanan e Shortliffe [BUC84], não há uma representação exata de  $FC[d_i, s_1 \& s_2]$  puramente em termos de  $FC[d_i, s_1]$  e  $FC[d_i, s_2]$ . Há a necessidade de se considerar as inter-relações entre  $s_1$  e  $s_2$  em  $d_i$  e todos os outros diagnósticos para se calcular  $P(d_i/s_1 \& s_2)$ . Os Fatores de Certeza têm maior complexidade neste ponto do que a própria Regra de Bayes. Ilustrativamente, supõe-se que  $s_1$  confirme  $d_i$  ( $MC > 0$ ), mas  $s_2$  disconfirme  $d_i$  ( $MD > 0$ ), o Fator de Certeza global ( $FC[d_i, s_1 \& s_2]$ ) deve refletir as características de confirmação e disconfirmação de  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente. Não há como preservar a comutatividade sem considerar os componentes de  $FC$ ,  $MC$ 's e  $MD$ 's, separadamente [BUC84].

Assim, a característica do diagnóstico seqüencial leva à necessidade de se desenvolver uma técnica aproximada para tratar a extensão da rede evidencial de informações incrementalmente adquiridas. Buchanan e Shortliffe [BUC84] apresentam uma série de requerimentos a esta combinação, de modo a preservar sua consistência estatística. A seguir, apresenta-se uma síntese destes critérios.

#### 4.3.8.a. Critérios de Consistência Estatística Para as Medidas de Crença

Nos critérios a seguir, utiliza-se os seguintes símbolos e representações :

- $e+$   $\rightarrow$  representa toda a evidência de confirmação já adquirida
- $e-$   $\rightarrow$  representa toda a evidência de desconfirmação já adquirida

4.3.8.a1. *Limites*

- I) MC  $[h, e+]$  cresce para 1 quando uma evidência de confirmação é encontrada. MC iguala-se a 1 se e somente se (sse) uma evidência parcial logicamente implica em  $h$  com certeza [BUC84].
- II) MD  $[h, e-]$  cresce para 1 quando uma evidência de desconfirmação é encontrada. MD iguala-se a 1 sse uma evidência parcial logicamente implica em  $\neg h$  com certeza [BUC84].
- III)  $FC [h, e-] \leq FC [h, e- \& e+] \leq FC [h, e+]$   
 Este critério reflete o desejo de se ter uma medida de crença abordando a certeza assintoticamente quando uma evidência parcial confirmatória é obtida. Além disso, o critério reflete o desejo de se ter uma medida de crença abordando a certeza assintoticamente quando uma evidência desconfirmatória é obtida [BUC84].

4.3.8.a2. *Confirmação ou Desconfirmação Absoluta*

- I) Se MC  $[h, e+] = 1$  então MD  $[h, e-] = 0$ , independentemente da evidência de desconfirmação em  $e-$ , ou seja,  $FC [h, e+] = 1$ .
- II) Se MD  $[h, e-] = 1$ , então MC  $[h, e+] = 0$ , independentemente da evidência de confirmação em  $e+$ , ou seja,  $FC [h, e-] = -1$ .
- III) O caso onde MC  $[h, e+] = MD [h, e-] = 1$  é contraditório e, portanto, FC está indefinido.

4.3.8.a3. *Comutatividade*

Se  $s_1$  &  $s_2$  indicam a ordem de observação da evidência, primeiro  $s_1$  e depois  $s_2$ , então deve-se ter :

- I) MC  $[h, s_1 \& s_2] = MC [h, s_2 \& s_1]$   
 II) MD  $[h, s_1 \& s_2] = MD [h, s_2 \& s_1]$   
 III) FC  $[h, s_1 \& s_2] = FC [h, s_2 \& s_1]$

A ordem de observação não importa à crença em  $h$ .

4.3.8.a4. *Perda de Informação*

Se  $s_?$  é uma parte de evidência potencial e a verdade ou falsidade é desconhecida, então :

- I) MC  $[h, s_1 \& s_?] = MC [h, s_1]$   
 II) MD  $[h, s_1 \& s_?] = MD [h, s_1]$   
 III) FC  $[h, s_1 \& s_?] = FC [h, s_1]$

O modelo de decisão funcionaria por simples desconsideração das regras na forma  $FC[h,s?] = x$  se a verdade ou falsidade de  $s?$  não pode ser determinada [BUC84].

#### Observações

- Os itens 4.3.8.a e 4.3.8.b indicam que MC de uma hipótese nunca decresce, ao menos que seu MD tenda a 1. Analogamente, MD nunca decresce sem que MC tenda a 1.
- A aquisição seqüencial da evidência pode tornar tanto MC como MD não-nulos, fazendo com que FC seja um importante indicador da rede de crença em uma hipótese, dada a evidência atual. Isto permite concluir que um Fator de Certeza nulo significa ou
  - a) ausência da evidência de confirmação e desconfirmação ( $MC = MD = 0$ ) ou
  - b) observação de evidências parciais que são igualmente de confirmação e desconfirmação ( $MD = MC \neq 0$ ).

Esta característica faz com que também nos Fatores de Certeza haja o inconveniente apontado na Teoria Bayesiana relativo à não-diferenciação dos tipos de incerteza (item 3.5.4. do Capítulo III). Em outras palavras, também na Teoria dos Fatores de Certeza, a ignorância total e a crença de igual grandeza em hipóteses contraditórias são modeladas igualmente.

- FC's positivos indicam que há mais razão para acreditar nas hipóteses do que desacreditar, enquanto FC's negativos indicam o contrário.

Buchanan e Shortliffe [BUC84] destacam uma situação em particular: quando a evidência  $e$  é igual a  $e+$  &  $e-$ . Neste caso,  $FC[h,e]$  é o Fator de Certeza para um novo complexo de regras que deveria ser fornecido pelo especialista. O fator  $FC[h,e]$  poderia representar uma regra altamente específica, alterada para os poucos pacientes que satisfaçam todas condições especificadas em  $e+$  e  $e-$ .

Até agora, não se conhece o mecanismo pelo qual o fator cumulativo  $FC[h,e]$  é obtido com base em  $MC[h,e+]$  e  $MD[h,e-]$ .

Este parâmetro poderia ser calculado se todas as probabilidades fossem conhecidas. Sua obtenção é oriunda da adoção das chamadas *Funções de Combinação*, explicitadas em [BUC84].

#### 4.3.9. Funções de Combinação

As Funções de Combinação constituem um dos pontos mais analisados no sistema MYCIN. A razão é óbvia, uma vez que elas caracterizam o mecanismo de propagação de incerteza propriamente dito. Assim, a análise da validade teórica dos resultados conclusivos em MYCIN pressupõe necessariamente a abordagem das Funções de Combinação.

A exposição original de Buchanan e Shortliffe deu-se pela apresentação de postulados, onde as funções de combinação foram explicitadas. Estes postulados são a seguir relacionados, mas suas expressões podem também ser obtidas do método de combinação de razões probabilísticas sob as hipóteses de independência, como fez Adams em [ADA84].

Nos postulados de Buchanan e Shortliffe [BUC84], a primeira função satisfaz os 4 critérios anteriores de combinação de evidências seqüenciais, enquanto as demais funções são convenções necessárias à implementação do modelo.

##### 4.3.9.a. Evidência Incrementalmente Adquirida

$$MC [h, s_1 \& s_2] = \begin{cases} 0 & \text{se } MD [h, s_1 \& s_2] = 1 \\ MC [h, s_1] + MC [h, s_2](1 - MC [h, s_1]) & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Expressão (4-12. a)

$$MD [h, s_1 \& s_2] = \begin{cases} 0 & \text{se } MC [h, s_1 \& s_2] = 1 \\ MD [h, s_1] + MD [h, s_2](1 - MD [h, s_1]) & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Expressão (4-12. b)

A função de combinação 4-12.a é uma constatação do seguinte fato: já que MC representa um decrescimento proporcional na descrença, o MC de uma nova evidência parcial adquirida deveria ser aplicado proporcionalmente à descrença ainda remanescente. Analogamente, 4-12.b representa o fato de que já que MD representa um decrescimento proporcional na crença, o MD de uma nova evidência parcial adquirida deveria ser aplicado proporcionalmente à crença ainda remanescente [BUC84].

#### 4.3.9.b. Conjunção de Hipóteses

$$a) \text{ MC } [h_1 \& h_2, e] = \min (\text{MC } [h_1, e], \text{MC } [h_2, e])$$

$$b) \text{ MD } [h_1 \& h_2, e] = \max (\text{MD } [h_1, e], \text{MD } [h_2, e])$$

Expressões (4-13)

Os significados das funções de combinação 4-13.a e 4-13.b apresentam correspondência intuitiva. A função 4-13.a indica que a crença na conjunção de hipóteses é igual à crença na hipótese menos acreditada. A função 4-13.b indica que a descrença na conjunção de duas hipóteses é igual à descrença na hipótese mais desacreditada. Estes resultados ocorrem de forma análoga nas funções de disjunção de hipóteses, a seguir.

#### 4.3.9.c. Disjunção de Hipóteses

$$a) \text{ MC } [h_1 \text{ ou } h_2, e] = \max (\text{MC } [h_1, e], \text{MC } [h_2, e])$$

$$b) \text{ MD } [h_1 \text{ ou } h_2, e] = \min (\text{MD } [h_1, e], \text{MD } [h_2, e])$$

Expressão (4-14)

#### 4.3.9.d. Extensão Evidencial

A extensão evidencial refere-se à modelagem por Fatores de Certeza quando as evidências são incertas. Este caso foi abordado também na Teoria Bayesiana, no capítulo III, nos itens 3.4.3 e 3.4.4.

Supõe-se que a verdade ou falsidade de uma evidência parcial  $s_1$  não seja conhecida com certeza e que um FC (baseado em evidência inicial  $e$ ) é conhecido, refletindo o grau de crença em  $s_1$ . Supõe-se ainda que  $MC'[h, s_1]$  e  $MD'[h, s_1]$  são, respectivamente, os graus de crença e descrença em  $h$  quando  $s_1$  é conhecido com certeza (são as regras de decisão adquiridas do especialista). Assim, os graus de crença e descrença atuais são dados por :

$$a) MC[h, s_1] = MC'[h, s_1].\max\{0, FC[h_1, e]\}$$

$$b) MD[h, s_1] = MD'[h, s_1].\max\{0, FC[h_1, e]\}$$

Expressão (4-15)

O fato de a evidência em uma hipótese poder ser uma hipótese igualmente sujeita à confirmação é considerado neste critério [BUC84]. Ilustrativamente, Buchanan e Shortliffe [BUC84] reapresentam a situação de reconhecimento se todos os corvos são pretos, agora quando se está em um quarto escuro. Neste caso, a observação de um corvo, presumidamente preto, pode ser, na realidade, cinza ou roxo. Isto caracteriza uma evidência menos forte de que todos corvos sejam pretos em relação ao caso em que o corvo analisado é sabidamente preto.

Ao mesmo tempo em que se está testando uma hipótese ("todos os corvos são pretos"), tem-se a própria evidência como uma hipótese a ser confirmada (como a evidência "este corvo é preto"). Esta situação é comum em casos onde as evidências surgem de instrumentos medidores, sujeitos a erros de leitura.

#### Observação

As funções de combinação 4-13 (a e b) e 4-14 (a e b) são necessárias à função de combinação 4-15 (a e b), como demonstram Buchanan e Shortliffe [BUC84]. Os autores sugerem o exemplo onde:

$$FC'[h, s_1 \& s_2 \& (s_3 \& s_4)] = x$$

pela função de combinação 4-15 (a e b) :

$$FC[h, s_1 \& s_2 \& (s_3 \& s_4)] = x \cdot \max \{0, FC[h, s_1 \& s_2 \& (s_3 \text{ ou } s_4), e]\} \\ = x \cdot \max \{0, MC[h, s', e] - MD[h, s', e]\}$$

onde

$$MC[h, s', e] = MC[h, s_1 \& s_2 \& (s_3 \text{ ou } s_4), e] \text{ e} \\ MD[h, s', e] = MD[h, s_1 \& s_2 \& (s_3 \text{ ou } s_4), e]$$

podem ser calculados segundo as funções de combinação 4-13 e 4-14 por :

$$MC[h, s', e] = \min \{MC[s_1, e], MC[s_2, e], MC[s_3 \text{ ou } s_4, e]\} \\ \min \{MC[s_1, e], MC[s_2, e], \max (MC[s_3, e], MC[s_4, e])\} \\ MD[h, s', e] = \max \{MD[s_1, e], MD[s_2, e], MD[s_3 \text{ ou } s_4, e]\} \\ = \max \{MD[s_1, e], MD[s_2, e], \min (MD[s_3, e], MD[s_4, e])\}$$

#### 4.3.10. A Plausibilidade da Função de Combinação 4-12

A preocupação inicial dos autores da Teoria dos Fatores de Certeza com a consistência dos resultados pode agora ser direcionada mais especificamente à função de combinação 4-12. Buchanan e Shortliffe consideram a questão sob dois enfoques : inicialmente implementando a função como parte do sistema MYCIN e verificando se a técnica modela as conclusões dos especialistas que forneceram as regras. Posteriormente, escrevendo um programa que permite comparar os FC's computados de dados reais e usando a função de combinação 4-12.

A implementação propriamente e os resultados que a função de combinação 4-12 providencia serão abordados posteriormente, quando da análise do sistema MYCIN. Neste ponto, a segunda estratégia de verificação da consistência pode ser abordada, onde, analogamente a [BUC84], a seguinte notação é usada :

$FC'' [h, e] =$  FC computado usando-se a definição (4.5) (ou seja, oriundo do "conhecimento perfeito" ([BUC84]), já que  $P(h/e)$  e  $P(e)$  são conhecidos).

$FC [h, e] =$  FC computado pelo uso da função de combinação 4-12 e os MC's e MD's conhecidos para cada  $s_k$  onde  $e$  é a composição dos  $s_k$ 's (ou seja,  $P(h/e)$  não é conhecida, mas  $P(h/s_k)$  e  $P(h)$  o são no cálculo de  $MC[h, s_k]$  e  $MD[h, s_k]$ ). Oriundo do "conhecimento perfeito" ([BUC84]), já que  $P(h/e)$  e  $P(e)$  são conhecidos)



Os autores rodaram o programa considerando algumas centenas de pacientes e fizeram as seguintes observações :

- Para a grande maioria dos casos, a aproximação não produziu um  $FC''[h,e]$  radicalmente diferente do verdadeiro  $FC[h,e]$  (dos resultados apresentados em [BUC84], pode-se afirmar que  $FC''[h,e]/FC[h,e] \cong 0.25$  no pior caso e  $FC''[h,e]/FC[h,e] \cong 1.0$  no melhor caso).
- Há maiores discrepâncias quando a função de combinação 4-12 é aplicada algumas vezes (algumas partes de evidência são combinadas). Contudo, Buchanan e Shortliffe salientam que a maior parte das inconsistências é devida a casos onde as evidências parciais estão inter-relacionadas para a hipótese considerada (dependência condicional). O resultado evidencia a dificuldade da aplicação do Teorema de Bayes.
- A principal vantagem dos fatores de certeza foi novamente destacada: há a possibilidade de se considerar a confirmação separadamente da probabilidade, evitando-se as dificuldades inerentes à tentativa de colocar os julgamentos do especialista na forma probabilística.
- Analogamente aos bayesianos que insistem que os eventos devem ser escolhidos de forma tal que sejam independentes (ou que as probabilidades condicionais sejam conhecidas), Buchanan e Shortliffe [BUC84] enfatizam que as evidências parciais dependentes devem ser agrupadas em uma só regra .
- Buchanan e Shortliffe [BUC84] salientam um importante ponto relativo à implementação: deve-se reconhecer a inter-relação entre as evidências para que não se corra o risco de considerar uma evidência mais do que uma vez. Por exemplo, caso  $s_1$  implique em  $s_2$ , tem-se que  $FC[h,s_1 \& s_2] = FC[h,s_1]$ , indiferentemente do valor de  $FC[h,s_2]$ . A função 4-12 não leva tal fato em consideração, o que causa a necessidade de muito cuidado na aquisição das regras.

• A justificativa para a utilização dos Fatores de Certeza não está em uma melhora na Abordagem Bayesiana e sim no "desenvolvimento de um mecanismo pelo qual o conhecimento pode ser eficientemente representado e utilizado para modelar a tomada de decisão médica" [BUC84]. Os autores salientam ainda que isto se dá especificamente em contextos onde : (a) há falta de dados estatísticos (b) não se conhece as probabilidades inversas e (c) pode-se assumir a independência condicional na maioria dos casos.

#### 4.3.11. Os Fatores de Certeza Segundo o Raciocínio Probabilístico

Uma exposição alternativa à obtenção das funções de combinação apresentadas anteriormente foi proposta por Adams [ADA84]. Seu objetivo foi demonstrar que "uma parcela significativa do modelo dos Fatores de Certeza pode ser derivada de e é equivalente à Teoria Probabilística com a hipótese da independência estatística" (Adams, [ADA84]).

Inicialmente supõe-se uma população finita com  $n$  membros,  $s_1$  e  $s_2$  são propriedades ou evidências a favor ou contra determinada doença e  $h$  um certo "estado de doença" ou outra hipótese a um indivíduo. Além disso,  $n(e)$  significará o número de indivíduos que possuem  $s_1$  e  $s_2$ . Adams [ADA84] observa as seguintes relações :

$$\frac{n(e \& h)}{n(e)} \cdot \frac{n}{n(h)} = \frac{n(e \& h)}{n(h)} \cdot \frac{n}{n(e)}$$

de onde obtém-se a seguinte expressão para o Teorema de Bayes :

$$\frac{P(h/e)}{P(h)} = \frac{P(e/h)}{P(e)}$$

Dadas as evidências parciais  $s_1$  e  $s_2$  que levam à hipótese ou estado de doença  $h$ , fazendo-se a suposição da independência entre

ambas, ou seja,

$$\frac{n(s_1 \& s_2)}{n} = \frac{n(s_1)}{n} \cdot \frac{n(s_2)}{n}$$

tem-se que

$$\frac{n(s_1 \& s_2 \& h)}{n(h)} = \frac{n(s_1 \& h)}{n(h)} \cdot \frac{n(s_2 \& h)}{n(h)}$$

ou, em termos probabilísticos :

$$\begin{aligned} P(s_1 \& s_2) &= P(s_1) \cdot P(s_2) \text{ e} \\ P(s_1 \& s_2/h) &= P(s_1/h) \cdot P(s_2/h) \end{aligned}$$

resultando na seguinte expressão para o Teorema de Bayes :

$$\frac{P(s_1 \& s_2/h)}{P(s_1 \& s_2)} = \frac{P(s_1/h)}{P(s_1)} \cdot \frac{P(s_2/h)}{P(s_2)}$$

simplificando a expressão para o Teorema de Bayes.

#### 4.3.11.a. A Função de Combinação 4-12 e a Análise Probabilística

Anteriormente colocada na forma de postulado, a função de combinação 4-12 (a e b) pode agora ser obtida da análise probabilística sob condições de independência entre as evidências. Por exemplo, para  $MD[h, s_1 \& s_2]$ , segundo a definição de MD em (4-2), tem-se :

$$MD [h, s_1 \& s_2] = \frac{P(h) - P(h/s_1 \& s_2)}{P(h)}$$

$$= 1 - \frac{P(h/s_1 \& s_2)}{P(h)}$$

ou, segundo a Regra Bayesiana :

$$= 1 - \frac{P(s_1 \& s_2/h)}{P(s_1 \& s_2)}$$

Portanto, tem-se para  $s_1$  e  $s_2$  independentes :

$$1 - MD [h, s_1 \& s_2] = \frac{P(s_1 \& s_2/h)}{P(s_1 \& s_2)}$$

$$1 - MD [h, s_1 \& s_2] = \frac{P(s_1/h)}{P(s_1)} \cdot \frac{P(s_2/h)}{P(s_2)}$$

ou, de outra forma :

$$1 - MD [h, s_1 \& s_2] = (1 - MD[h, s_1]) (1 - MD[h, s_2])$$

que nada mais é do que uma outra forma para a expressão em (4-12.b). Pode-se agora chegar à expressão em (4-12.a) de forma análoga.

Entretanto, há um caso especial onde os resultados em (4-12) não são alcançados segundo um desenvolvimento probabilístico. Trata-se da situação em que apenas uma evidência parcial  $s_1$  é suficiente para provar  $h$  (todos com  $s_1$  têm  $h$ ). O modelo em MYCIN, através de (4-12.b), torna  $MD = 0$  quando  $e$  prova  $h$ . Analogamente, pode-se fazer tais observações para o caso em que  $e$  refuta  $h$ . Adams [ADA84] salienta uma série de restrições que devem ser impostas aos MC's e MD's para mantê-los consistentes e que não foram colocadas originalmente por Buchanan e Shortliffe.

Resumidamente, Adams chegou à seguinte expressão que relaciona os valores MC  $[h, s_1]$  e MC  $[h, s_2]$ , de modo a continuarem consistentes :

$$\left\{ 1 + \left[ \frac{1}{P(h)} - 1 \right] MC[h, s_1] \right\} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{P(h)} - 1 \right] MC[h, s_2] \right\} \leq \frac{1}{P(h)}$$

#### 4.3.11.b. Conjunção e Disjunção de Hipóteses e a Análise Probabilística

Adams [ADA84] afirma que não é muito clara a importância das Funções de Combinação para a Conjunção e Disjunção de hipóteses na aplicação prática do modelo. Contudo, o autor acredita não ser grande. Apesar disso, Adams e outros autores têm chamado a atenção para algumas inconsistências probabilísticas nas funções (4-13) e (4-14).

Especificamente, para o caso da conjunção de duas hipóteses  $h_1$  e  $h_2$ , Adams coloca o caso em que  $h_1$  e  $h_2$  são mutuamente exclusivas. Assim, a expressão (4-13) seria inconsistente, pois  $h_1 \& h_2$  é falso (tem probabilidade zero), não importando a evidência em consideração. Probabilisticamente, a conjunção deveria considerar a seguinte expressão :

$$\frac{P(h_1 \& h_2 / e)}{P(h_1 \& h_2)} = \frac{P(h_1 / e)}{P(h_1)} \cdot \frac{P(h_2 / e)}{P(h_2)}$$

quando, evidentemente,  $h_1$  e  $h_2$  são independentes.

Para as expressões relativas à disjunção de hipóteses (4-14a e b), Adams [ADA84] considera novamente  $h_1$  e  $h_2$  mutuamente exclusivas, com cada uma tendo determinada probabilidade de ser verdade. Neste caso, a disjunção " $h_1$  ou  $h_2$ " deveria ser mais provável ou confirmável que " $h_1$  ou  $h_2$ ", como (4-14) fornece.

#### 4.4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS FATORES DE CERTEZA

Além dos fundamentos teóricos relativos aos Fatores de Certeza, a implementação computacional desta técnica é relevante, especialmente quando o principal interesse é o tratamento de incerteza em sistemas especialistas. Nesta seção, os principais aspectos referentes à implementação são abordados com a finalidade de elucidar as preocupações que devem estar presentes na confecção de sistemas especialistas cuja incerteza é tratada via FC's.

O principal sistema especialista que adotou os fatores de certeza foi o mesmo que impulsionou o desenvolvimento da teoria: MYCIN. Buchanan e Shortliffe [BUC84] caracterizam o modelo em MYCIN e apresentam exemplos em que o processo de propagação da incerteza é ilustrado.

*"MYCIN usa os fatores de certeza para acumular a evidência e para decidir, dentre prováveis, a identidade para organismos causadores de doenças em pacientes com infecções bacteriológicas. Um regime terapêutico é, então, determinado - um que seja apropriado para assegurar os organismos que evidenciam a necessidade de terapia. "*  
[BUC84].

#### 4.4.1. O Mecanismo de Inferência e Atualização dos FC's

A identidade de um organismo em MYCIN é encontrada através da consideração das hipóteses alternativas que foram confirmadas ou disconfirmadas pelas regras. Cada uma das hipóteses tem armazenadas suas medidas MC e MD, inicializadas por zero. A atualização destes valores ocorre quando a regra é aplicada ao paciente em consideração. Neste caso, usando-se a função de combinação 4-12, pode-se atualizar ou MD ou MC em hipóteses relevantes. Após todas as regras relevantes terem sido executadas, o FC final pode ser calculado, para cada hipótese, ( $FC = MC - MD$ ). A seguir, compara-se as hipóteses alternativas em relação a seu FC acumulado. As hipóteses mais confirmadas caracterizam a base do programa de recomendação terapêutica.

Buchanan e Shortliffe [BUC84] propõem uma situação ilustrativa tomando uma hipótese  $h_1$  = "o organismo é um *Streptococcus*", confirmada até determinado momento com  $FC = 0.3$ . Caso  $e$  represente toda a evidência até este instante, tem-se  $MC[h_1, e] = 0.3$  e  $MD[h_1, e] = 0$ . A seguir os autores propõem o encontro de uma nova regra com  $FC = 0.2$  para a hipótese  $h_1$ . Caso  $e$  seja atualizado para incluir a evidência na premissa desta última regra ( $e_2$ ) junto à já existente ( $e_1$ ), tem-se, por (4-12a) :

$$\begin{aligned} MC[h_1, e] &= MC[h_1, e_1 \& e_2] = MC[h_1, e_1] + MC[h, e_2] \{1 - MC[h, e_1]\} \\ &= 0.3 + 0.2 \{1 - 0.3\} \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

$$e \text{ MD}[h_1, e] = 0$$

A seguir, os autores sugerem o encontro de uma nova regra com  $FC = -0.1$ . Uma nova atualização de  $e$  é necessária e a função de combinação 4-12 fornece  $MC[h_1, e] = 0.44$  (pois  $MC[h_1, e_2] = 0$ ) e:

$$\begin{aligned} MD[h_1, e] &= MD[h_1, e_1 \& e_2] = MD[h_1, e_1] + MD[h, e_2] \{1 - MD[h, e_1]\} \\ &= 0 + (-0.1) \{1 - 0\} \\ &= -0.1 \end{aligned}$$

Se nenhuma regra posterior permitir considerar novamente a possibilidade de que o organismo seja um *Streptococcus*, o resultado final será  $FC[h_1, e] = 0.44 - 0.1 = 0.34$ . Será este o número que MYCIN considerará na comparação de  $h_1$  com as demais hipóteses consideradas na identificação do organismo.

Buchanan e Shortliffe [BUC84] enfatizam que este mesmo mecanismo é utilizado na avaliação de *todo* o conhecimento, não sendo proveitoso somente na identificação patogênica.

A participação do usuário no sentido de inserir sua própria incerteza no processo de decisão é possível em MYCIN. Quando o usuário responde a uma questão do sistema, associa-se  $FC = 1$ , a menos que o próprio usuário assinale novo  $FC$  (multiplicado por 10).

#### 4.4.2. Exemplos de Propagação de Incerteza em MYCIN

##### 4.4.2.a. Exemplo 1

A seguir considera-se uma situação hipotética em MYCIN com a finalidade de se evidenciar a utilização das Funções de Combinação e o mecanismo de propagação do sistema. Novamente são os autores Buchanan e Shortliffe [BUC84] os proponentes da ilustração.

Supõe-se a seguinte situação, onde a participação do sistema MYCIN é representada em *itálico* [BUC84] :

14) O organismo cresce em grupos, cadeias ou pares ?

CADEIAS (6)

PARES (3)

GRUPOS (-8)

Neste caso, uma regra que contivesse referências ao mecanismo de crescimento do organismo receberia os seguintes valores :

$$MC [cadeias,e] = 0.6$$

$$MC [pares,e] = 0.3$$

$$MC [grupos,e] = 0$$

$$MD [cadeias,e] = 0$$

$$MD [pares,e] = 0$$

$$MD [grupos,e] = 0.8$$

A seguir, Buchanan e Shortliffe propõem uma regra amostral com

$$FC [h_1, s_1 \& s_2 \& s_3] = 0.7$$

onde  $h_1$  é a hipótese de o organismo ser o *Streptococcus*,  $s_1$  é a observação de que o organismo é *gram-positivo*,  $s_2$  a de que é um *coccus* e  $s_3$  a de que cresce na cadeia. Uma suposição adicional é o conhecimento da morfologia e veracidade de  $s_1$ , ou :

$$FC [s_1,e] = 1$$

$$FC [s_2,e] = 1$$

Contudo, considerando os valores anteriores, MYCIN encontraria :

$$FC [cadeias,e] = FC [s_3,e] = 0.6 - 0 = 0.6$$

Isto faz com que a extensão evidencial total anterior de 0.7 seja inapropriada neste caso. O fator 0.7 foi associado pelo especialista na suposição de que todas as três hipóteses na premissa fossem verdade com certeza. Para este caso, a função de combinação 4-16 é necessária na obtenção de um novo FC :

$$\begin{aligned} FC[h, s_1 \& s_2 \& s_3] &= MC [h_1, s_1 \& s_2 \& s_3] - MD [h_1, s_1 \& s_2 \& s_3] \\ &= MC'[h_1, s'] \max \{0, FC [s', e]\} - 0 \end{aligned}$$

com  $s' = s_1 \& s_2 \& s_3$ . O cálculo na conjunção das hipóteses  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  se dá via função de combinação 4-14, ou :

$$\begin{aligned} FC [s_1 \& s_2 \& s_3, e] &= MC [s_1 \& s_2 \& s_3, e] - MD [s_1 \& s_2 \& s_3, e] \\ &= \min (1.0, 1.0, 0.6) - \max (0, 0, 0) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Resultando em :

$$\begin{aligned} FC[h, s'] &= MC'[h_1, s'] \max \{0, FC [s', e]\} - 0 \\ &= (0.7) \cdot (0.6) - 0 \\ &= 0.42 \end{aligned}$$



ou seja,

$$MC [h_1, s_1 \& s_2 \& s_3] = 0.42$$

$$MD [h_1, s_1 \& s_2 \& s_3] = 0$$

Isto evidencia o fato que a extensão da regra reflete a incerteza observada em  $s_3$ . Para se obter o Fator de Certeza final, deve-se combinar  $MC [h_1, s_1 \& s_2 \& s_3] = 0.42$  com os graus MC prévios para as hipóteses de que o organismo seja *Streptococcus*, através da função de combinação 4-12.

#### 4.4.2.b. Exemplo 2

Um exemplo a seguir ilustra novamente a propagação de certeza segundo os Fatores de Certeza.

REGRA 1 :

SE O PEDAL DO FREIO ESTÁ BAIXO  
ENTÃO AS LONAS ESTÃO FATIGADAS

$$MC1 = 0.3, MD1 = 0$$

$$FC1 = 0.3$$

REGRA 2 :

SE O CARRO DEMORA A FREIAR  
ENTÃO AS LONAS ESTÃO FATIGADAS

$$MC2 = 0.2, MD2 = 0$$

$$FC2 = 0.2$$

CONCLUSÃO : AS LONAS ESTÃO FATIGADAS

pela equação 4-12.a tem-se :

$$MC3 = MC1 + MC2 [1 - MC1] = 0.3 + 0.2 [1 - 0.3] = 0.44$$

$$MD3 = 0$$

$$FC3 = 0.44$$

REGRA 3 :

SE NÃO HÁ BARULHO AO FREIAR  $MC4 = 0, MD4 = 0.1$   
ENTÃO AS LONAS ESTÃO FATIGADAS  $FC4 = - 0.1$

CONCLUSÃO : AS LONAS ESTÃO FATIGADAS

$$MD5 = MD3 + MD4 [1 - MD3] = 0.0 + 0.1 [1 - 0.0] = 0.1$$

$$MC5 = MC3 + MC4 [1 - MC3] = 0.44 + 0.0 [1 - 0.44] = 0.44$$

$$FC5 = 0.44 - 0.1 = 0.34$$

#### 4.4.3. A Fase Terapêutica

Buchanan e Shortliffe [BUC84] salientam que, pelo fato de os números obtidos serem aproximações, não se justifica a aceitação de uma hipótese como correta simplesmente por possuir o mais alto FC. Assim, todas as hipóteses à identidade do organismo com alta parcela de possibilidade terão terapia correspondente. O procedimento, propriamente, consiste em ordenar as hipóteses do mais alto ao mais baixo FC, selecionando-se aquelas cuja soma de seus FC's exceda a  $z$  (onde  $z$  é igual a 90% da soma dos FC's de todas as hipóteses confirmadas). Esta técnica subjetiva usa, portanto, uma abordagem semi-quantitativa a fim de obter um mecanismo de comparação, a fim de decidir quais hipóteses serão "enviadas" à fase terapêutica.

#### 4.5. A EVOLUÇÃO DO MODELO DOS FATORES DE CERTEZA

Buchanan e Shortliffe [BUC84] realizaram algumas modificações no modelo dos Fatores de Certeza. A principal foi a redefinição da função de combinação. Os autores apresentam as seguintes razões :

1. A possibilidade de uma única evidência parcial negativa superar várias evidências parciais positivas (e vice-versa) e
2. O custo computacional de estocar ambos MC's e MD's (ao invés de FC's cumulativos) a fim de manter a comutatividade.

Buchanan e Shortliffe [BUC84] explicitam a primeira razão, tomando o exemplo de oito ou nove regras todas apoiando uma hipótese simples com FC's de 0.4 a 0.8. Assim, o comportamento assintótico do MC cumulativo resultaria em um valor próximo a  $0.999^{14}$ . Supondo a existência de uma evidência disconfirmando a

---

<sup>14</sup> Um dos problemas verificados nos Fatores de Certeza é o fato de que a aplicação sucessiva das funções de combinação em regras apoiando determinada hipótese fazem com que o FC acumulado convirja rapidamente para 1, não importando o quanto pequeno é cada FC individual ([BUC84], pg. 213).

regra com FC de 0.8, a rede de apoio para a hipótese seria [BUC84] :

$$FC = MC - MD = 0.999 - 0.8 = 0.199$$

Devido a este comportamento contra-intuitivo, muitas vezes o sistema MYCIN foi levado a realizar inferências incorretas, especialmente em situações onde o FC final, depois da busca, tornou-se menor que 0.2. Isto levaria a crença final abaixo de um limite estabelecido. Assim, verifica-se que uma única evidência negativa sobrepujou e negou a evidência combinada por qualquer número de evidências de apoio às regras [BUC84].

Assim Buchanan e Shortliffe [BUC84] resolveram modificar a definição do Fator de Certeza, de modo a diminuir estes efeitos. A nova definição é resultante da modificação da funções de combinação, levando às seguintes definições [BUC84] :

$$FC = \frac{MC - MD}{1 - \min(MC, MD)}$$

Expressão 4-16

$$FC_{\text{COMBINADO}} = \begin{cases} X + Y \cdot (1 - X) & \text{se } X \text{ e } Y > 0 \\ (X + Y) / (1 - \min(|X|, |Y|)) & \text{se ou } X \text{ ou } Y < 0 \\ - FC_{\text{COMBINADO}}(-X, -Y) & \text{se } X \text{ e } Y < 0 \end{cases}$$

Expressão 4-17

Na equação 4-17,  $X = FC[h, e_i]$  e  $Y = FC[h, e_j]$ . A equação 4-16 não muda o conceito de Fator de Certeza para qualquer evidência parcial (já que ou MC ou MD será zero por definição). Além disso, a função de combinação também não muda quando os FC's a combinar têm o mesmo sinal. A modificação ocorre somente quando os dois fatores de certeza a combinar são opostos [BUC84]. Retomando a ilustração anterior, Buchanan e Shortliffe observa, que :

$$FC_{\text{COMBINADO}}(0.999, -0.80) = 0.199/0.2 = 0.99$$

enquanto

$$FC_{\text{COMBINADO}}(0.55, -0.50) = 0.05/0.5 = 0.1$$

Relativamente à plausibilidade desta modificação, os autores Buchanan e Shortliffe comentam que ela preserva a comutatividade sem necessitar particionar a evidência em pesos positivos e negativos para posterior combinação. Com isso, ao invés de estocar MC e MD para cada hipótese, MYCIN simplesmente estoca o fator de certeza FC atual e o combina com uma nova evidência, quando esta surgir [BUC84].

Apesar desta nova definição evitar os problemas na combinação de evidências contrárias e de necessitar menor número de avaliações na base de dados, ela apresenta menor justificativa teórica ou interpretação que as fórmulas originais [BON87]. Assim, outros autores têm proposto novas definições para o Fator de Certeza. Heckerman [HEC85] obteve uma nova definição para FC que permite a comutatividade e tem consistente interpretação probabilística :

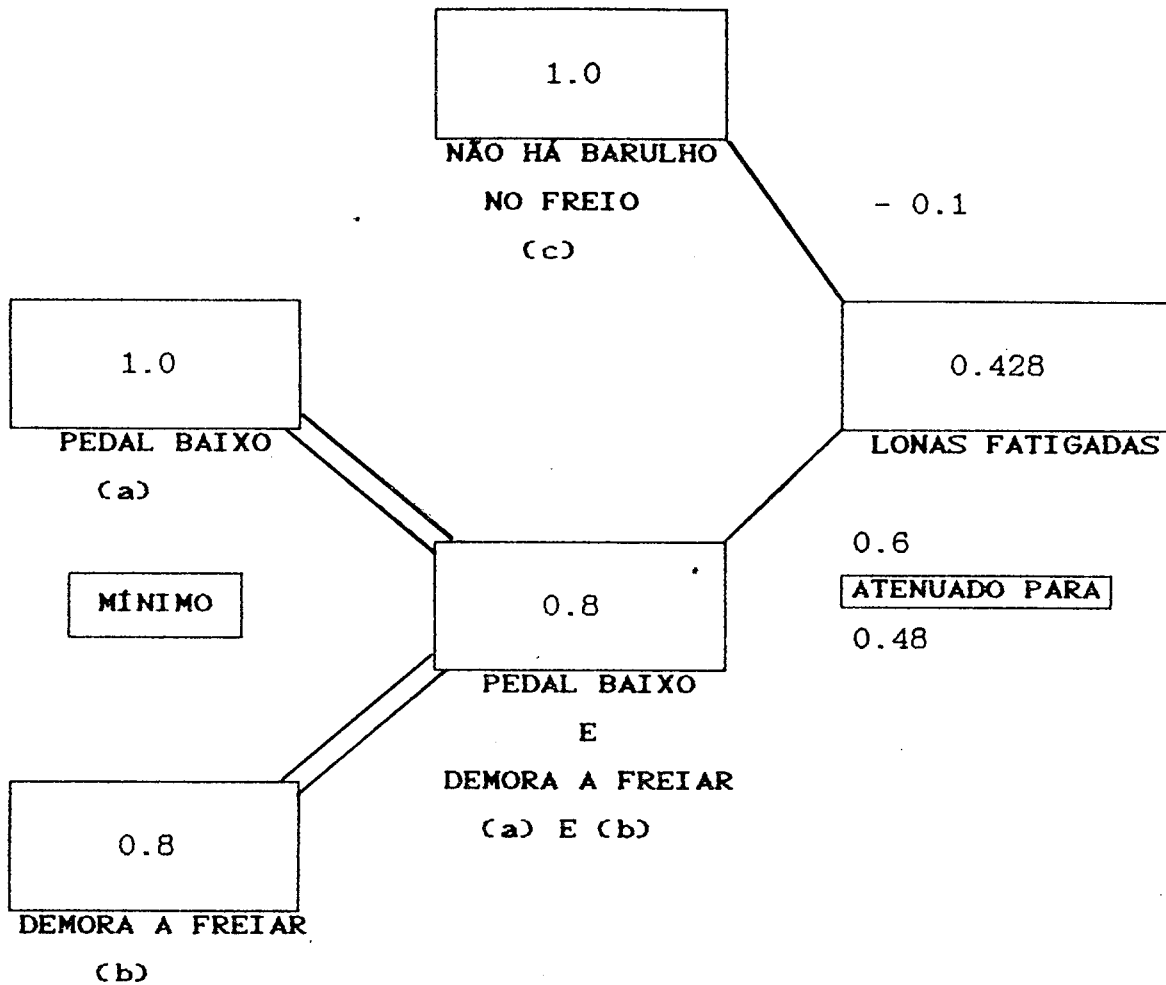
$$FC[h,e] = \frac{P(h/e) - P(h)}{P(h/e) \cdot [1 - P(h)] + P(h) \cdot [1 - P(h/e)]}$$

Expressão 4-18

Finalmente, relativamente à terminologia, Henkind e Harrison [HEN88] diferenciam o Fator de Certeza modificado denominando-o de "Cálculo EMYCIN"<sup>15</sup>, o que será adotado neste trabalho.

<sup>15</sup> MYCIN é o programa de diagnóstico médico e terapia bacteriana, enquanto EMYCIN é a shell de sistemas especialistas obtida a partir do MYCIN através da remoção da base de conhecimento e manutenção do mecanismo de inferência do sistema MYCIN. Segundo Henkind e Harrison [HEN88], o sistema MYCIN foi reimplementado posteriormente utilizando a shell EMYCIN, onde o tratamento de incerteza se dá pelo Fator de Certeza Modificado.

## 4.5.1. Exemplo 3



Segundo a equação de 4-17 obtém-se a seguinte Função de Combinação dos FC :

$$\begin{aligned}
 FC [d] &= (FC [c] + FC [a \& b]) / (1 - \min (|FC [c]|; |FC [a \& b]|)) \\
 &= (- 0.1 + 0.48) / (1 - \min (|-0.1|; |0.48|)) = 0.402
 \end{aligned}$$

## 4.6. A COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DOS FATORES DE CERTEZA

Para atualizar a crença em uma hipótese quando uma evidência parcial surge, o sistema MYCIN necessita dois itens adicionais de informação : os fatores MC e MD da evidência em relação à hipótese. Isto faz com que a complexidade computacional dos Fatores de Certeza seja linear [HEN88].

Henkind e Harrison [HEN88] afirmam que, ao se analisar as Funções de Combinação 4.12 (a e b), 4.13 (a e b) e 4.14 (a e b), nota-se que a atualização de  $p$  hipóteses e/ou evidências parciais leva a uma complexidade temporal de  $O(p)$ .

Em relação ao Cálculo EMYCIN, embora o número de avaliações a ser estocado seja menor, a complexidade computacional para realizar as atualizações das crenças ao se combinar  $p$  hipóteses e/ou evidências também é de  $O(p)$  [HEN88].

Uma análise da Literatura sobre Tratamento de Incerteza em Sistemas Especialistas evidencia que são poucos os trabalhos em que a complexidade computacional dos Fatores de Certeza é abordada. Mesmo nos trabalhos de Buchanan e Shortliffe [BUC84], mentores desta técnica, não se encontra qualquer alusão à complexidade computacional. Em realidade, vários autores ressaltam a boa performance computacional do sistema MYCIN o que permite concluir que este não é um aspecto restritivo à aplicação dos Fatores de Certeza.

## CAPÍTULO V

### TEORIA DA EVIDÊNCIA

#### 5.1. INTRODUÇÃO

A partir da década de 80, uma abordagem alternativa aos métodos baseados em Probabilidade Clássica, proposta por Shafer em 1976 ([SHA76]) tem sido objeto de amplo interesse junto aos pesquisadores de Inteligência Artificial: a *Teoria da Evidência de Dempster e Shafer*. Shafer [SHA86] atribui este fato à grande dificuldade em se enfrentar a flexibilidade na aquisição e uso do conhecimento através de um Tratamento Bayesiano. Não se pode, por exemplo, adicionar ou remover avaliações probabilísticas como as evidenciadas na construção dos sistemas MYCIN e PROSPECTOR. A maior flexibilidade da Teoria de Dempster e Shafer torna-a atrativa ao Tratamento de Incerteza em Sistemas Especialistas.

A abordagem dos conceitos envolvidos na Teoria da Evidência permitirá que mais vantagens em sua utilização sejam contempladas, principalmente quando comparada, em certos domínios de conhecimento, à Teoria Bayesiana e aos Fatores de Certeza.

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos que fundamentam a teoria, os procedimentos necessários na implementação computacional e as principais dificuldades presentes na modelagem da incerteza pela Teoria da Evidência.

#### 5.2. OS FUNDAMENTOS DA TEORIA DA EVIDÊNCIA

##### 5.2.1. A Divergência com Relação aos Métodos Bayesianos

A representação da incerteza na Teoria de Dempster e Shafer fundamenta-se em graus de crença, como os Métodos Bayesianos e a Teoria dos Fatores de Certeza. Contudo, enquanto os Métodos Bayesianos associam uma distribuição de probabilidade a toda hipótese individualmente, a Teoria da Evidência permite a atribuição de graus de crença a subconjuntos de hipóteses.

Esta característica é de grande utilidade em sistemas especialistas, pois permite a modelagem de um dos mecanismos de raciocínio mais presentes entre os peritos. Como lembram Gordon e Shortliffe [GOR84], um especialista usa evidências que, ao invés de apoiarem uma única hipótese no conjunto original de hipóteses, geralmente apóiam um subconjunto maior deste conjunto.

Na Teoria da Evidência, a Regra de Produção é vista como uma implicação entre conjuntos, ou seja, a regra "Se e então h" é considerada como sendo uma implicação entre um conjunto (e) e seu subconjunto (h). A figura 5-1 ilustra este paradigma.

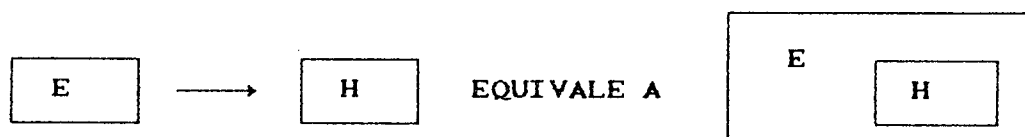


FIGURA 5-1 : A Regra de Produção na Teoria da Evidência

### 5.2.2. A Combinação de Evidências

Um segundo aspecto relevante na Teoria da Evidência refere-se ao modo pelo qual combina-se uma evidência adicional com as evidências existentes. Cada uma das evidências é representada por uma *Função de Crença*. Evidências adicionais são agregadas a evidências existentes pela *Regra de Combinação de Dempster*. Há a suposição de que as hipóteses em consideração são mutuamente exclusivas e exaustivas. Como nos Fatores de Certeza, a ordem de consideração das hipóteses não é relevante.

### 5.2.3. O Tratamento da Negação de uma Hipótese

A questão da representação de negações discutida quando da abordagem dos Fatores de Certeza tem tratamento análogo na Teoria da Evidência.

Segundo a Abordagem Bayesiana, a consideração da crença em determinada hipótese implica em tomar a crença restante para a sua negação. Na Teoria da Evidência, como nos Fatores de Certeza,



a crença em cada hipótese no conjunto original não soma necessariamente 1 e sim um número menor ou igual a 1. Isto significa que alguma crença pode ser atribuída a subconjuntos do conjunto de hipóteses original.

### 5.3. O TRATAMENTO DE INCERTEZA SEGUNDO A TEORIA DA EVIDÊNCIA

A Teoria da Evidência tem sido abordada na literatura de duas formas distintas. A primeira se utiliza de conceitos da Teoria dos Conjuntos e apresenta os fundamentos da Teoria de Dempster e Shafer segundo este contexto. Uma segunda forma vale-se de um exemplo, sobre o qual os conceitos da Teoria da Evidência são explicitados e aplicados. No presente trabalho, o caráter didático desta segunda forma de abordagem pareceu mais atrativo. Assim, também aqui, um exemplo será o meio adotado para a elucidação dos conceitos da Teoria da Evidência.

#### 5.3.1. Um Exemplo de Raciocínio Evidencial

Um exemplo plausível pode ser construído como uma analogia às ilustrações propostas por Cohen [COH85] e Gordon e Shortliffe [GOR84] :

Supõe-se que se está interessado em se conhecer que montadora de automóveis venderá mais veículos no Brasil, no próximo ano. O conjunto de hipóteses (ou soluções) para esta questão pode ser formado pelas empresas *Volkswagen* (*Vw*), *Ford*, *Fiat* e *Chevrolet* (*Chev*). Na Teoria da Evidência, o conjunto de todas as evidências é denominado *Quadro de Discernimento*, simbolizado por  $\Theta$ . Assim, o quadro de discernimento neste exemplo será :

$$\Theta = \{ Vw, Ford, Fiat, Chev \}$$

Responder a questão de interesse é fazer julgamentos probabilísticos sobre as hipóteses representadas no quadro de discernimento.

Pode-se imaginar um perito em previsão de vendas analisando o comportamento do mercado e inferindo as probabilidades de domínio de cada uma das montadoras. Sua inferência pode se basear em evidências incrementalmente adquiridas. Por exemplo, supondo-se que há evidências que indicam a supremacia da *Autolatina* no mercado, haveria um julgamento probabilístico ao seguinte subconjunto do conjunto  $\Theta$  :

{ *Vw, Ford* }, representado pela hipótese "*Vw-ou-Ford*".

Analogamente, uma nova evidência parcial pode indicar uma derrota da *Autolatina*, caracterizando uma designação probabilística ao subconjunto :

{ *Fiat, Chev* }, caracterizado pela hipótese "*Fiat-ou-Chev*".

Ainda consultando o comportamento do mercado, o perito poderá ter mais evidências parciais que indicam a exclusão, por exemplo, da *Fiat* como vencedora de vendas. Esta evidência disconfirmando a hipótese "*Fiat*" é equivalente à evidência confirmando a hipótese "*Não-Fiat*". Esta, por sua vez, corresponde à hipótese "*Vw-ou-Ford-ou-Chev*" ou o subconjunto {*Vw, Ford, Chev*}.

Estas situações ilustram o fato de que cada subconjunto de hipóteses em  $\Theta$  causa uma nova hipótese equivalente à disjunção ("ou") das hipóteses no subconjunto. Cada hipótese no quadro de discernimento é um subconjunto com um único elemento (subconjunto unitário) [GOR84]. Assim, um quadro de discernimento pode gerar  $2^{\Theta}$  subconjuntos de hipóteses, como ilustrado na figura 5-2.

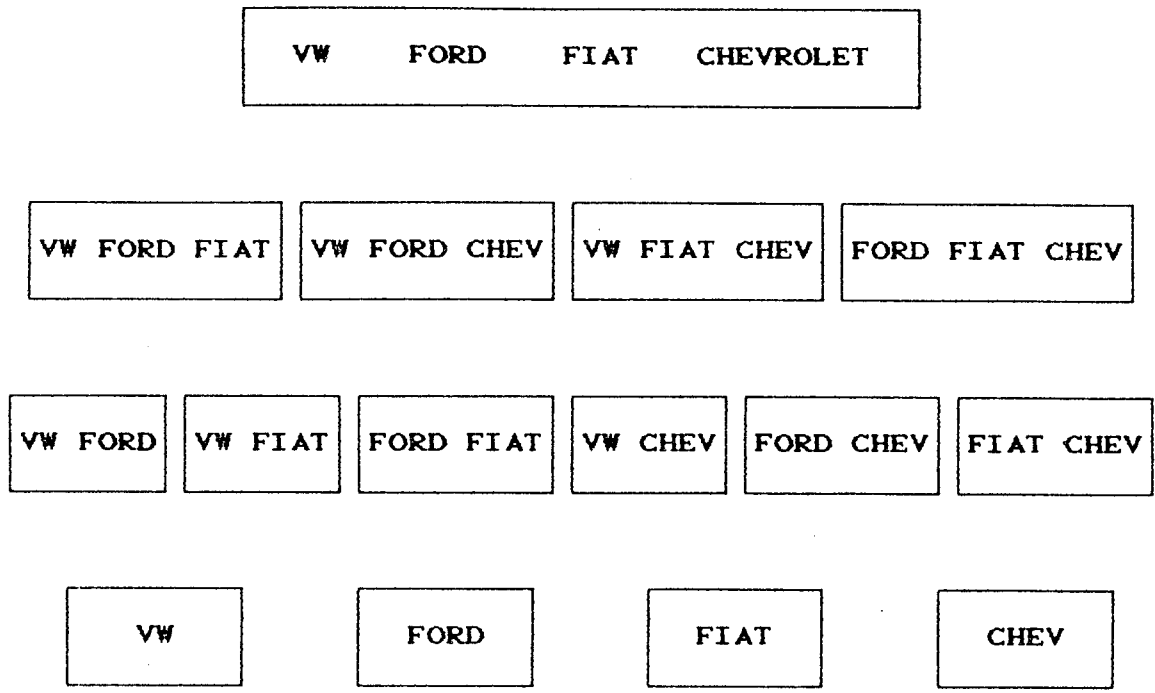


FIGURA 5-2 : Representação dos Subconjuntos de  $\Theta$

Para o exemplo ora discutido, o número de subconjuntos gerados por  $2^\Theta$  é igual a  $2^4$ . O  $16^\circ$  conjunto não representado na figura 5-2 é o conjunto vazio.

Os subconjuntos de interesse em certa circunstância são aqueles englobados por determinada evidência. Por exemplo, se o perito em previsão de vendas pertencer à Autolatina, talvez ele direcione suas evidências à pertinência ou não de determinada montadora a esta organização, além das próprias hipóteses individuais no quadro  $\Theta$ . Isto reduziria o quadro de interesse aos subconjuntos de hipóteses representados na figura 5-3.

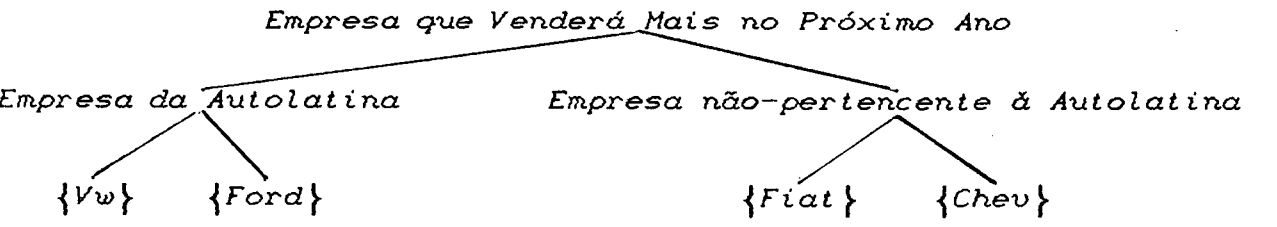


FIGURA 5-3 : Subconjuntos de interesse na determinação do campeão de vendas

### 5.3.2. Probabilidade Básica Associada

Para quantificar o grau com o qual determinada evidência apóia uma hipótese, a Teoria de Dempster e Shafer utiliza um número no intervalo  $[0,1]$ . Supondo que uma evidência apóie uma hipótese  $h$  entre as  $2^{\Theta}$  hipóteses possíveis, a Teoria da Evidência pressupõe uma associação desta crença aos subconjuntos contendo  $h$ .

No exemplo anterior, supõe-se uma situação inicial em que não há nenhuma evidência apoiando qualquer um dos elementos no conjunto  $\Theta = \{Vw, Ford, Fiat, Chev\}$ . Esta ignorância equivale a assumir o valor 1 para a crença em  $\Theta$ . Num segundo momento, determinada evidência poderia confirmar a predominância das montadoras da Autolatina. Isto diminuiria o grau de confirmação na hipótese representada pelo conjunto  $\Theta$ .

Para representar o grau de confirmação, Dempster e Shafer utilizam a *Probabilidade Básica Associada*<sup>16</sup>, denotada por  $m$ . Esta representa o impacto de cada evidência parcial distinta nos subconjuntos de  $\Theta$  [GOR84]. Esta propagação da crença em um subconjunto de  $\Theta$  sugere a forma da função  $m$  a seguir.

#### Definição 5-1 - [SHA76]

Se  $\Theta$  é um quadro de discernimento, então a função  $m : 2^{\Theta} \rightarrow [0,1]$  é chamada *Probabilidade Básica Associada* (pba) sempre que :

- e
- a)  $m(\emptyset) = 0$
  - b)  $\sum_{A \subset \Theta} m(A) = 1$

Expressão (5-1)

<sup>16</sup> Silva e Milidiú [SIL89] preferem o termo "massa básica associada", argumentando que este reflete melhor o caráter epistêmico da função.

A função  $m$  é uma generalização da função de densidade da Probabilidade Clássica. Esta associa um número no intervalo  $[0,1]$  a qualquer elemento de  $\Theta$ , tal que a soma dos números seja 1. Por sua vez, considerando  $2^\Theta$  o domínio generalizado de todos os subconjuntos de  $\Theta$ , a função  $m$  associa um número no intervalo  $[0,1]$  a qualquer subconjunto de  $\Theta$ , tal que a soma dos números seja 1 (condição 5-1b). Assim,  $m$  permite a associação de um grau de crença a todos subconjuntos da árvore na figura 5-2 e não somente ao conjunto-raiz da árvore, como a função de densidade de probabilidade [GOR84].

O valor  $m(\Theta)$  caracteriza o grau de ignorância ou, conforme Gordon e Shortliffe [GOR84], a parcela de crença que permanece inassociada após a designação de crença a vários subconjuntos próprios de  $\Theta$ . Quanto maior for  $m(\Theta)$ , maior é a incerteza. Por exemplo, uma evidência apoiando um subconjunto  $A$  de  $\Theta$  não informa necessariamente nada a respeito de outros subconjuntos de  $\Theta$ . Caso  $m(A) = s$  e  $m$  não associasse nenhuma crença a outros subconjuntos de  $\Theta$ ,  $m(\Theta) = 1 - s$ . Aqui nota-se que, na Teoria da Evidência, a crença remanescente é associada a todo conjunto  $\Theta$  e não à negação da hipótese (ou complemento do subconjunto  $A$ ), como o Modelo Bayesiano requer [GOR84].

Analogamente ao que fazem Gordon e Shortliffe em [GOR84], apresenta-se a seguir uma série de situações que ilustram os conceitos presentes na função  $m$ .

#### Exemplo 5-1.

No exemplo apresentado anteriormente, supõe-se uma situação inicial em que nenhuma evidência a respeito do comportamento do mercado consumidor de automóveis esteja disponível. A probabilidade básica associada que representa a ignorância, chamada *Função Vacuosa*<sup>17</sup>, atribui 1 para  $\Theta = \{Vw, Ford, Fiat, Chev\}$  e 0 para os demais subconjuntos de  $\Theta$ .

<sup>17</sup> O termo em português está presente no trabalho de Silva e Milidiú [SIL89]. A Função Vacuosa caracteriza a situação em que a única crença existente é a crença no conjunto  $\Theta$ , ou seja, representa a ignorância absoluta.

Aqui reside uma das maiores divergências entre a Teoria da Evidência e a Abordagem Bayesiana. Os bayesianos representariam a ignorância atribuindo 0.25 para cada elemento em  $\Theta$ , assumindo informação a priori [GOR84]. Na realidade, isto constitui uma extrapolação no conhecimento, já que nenhuma informação específica às empresas está disponível. A designação probabilística às hipóteses individualmente caracteriza uma falta de distinção entre incerteza, ignorância e certeza de mesma extensão, como se viu nos itens 3.5.3. e 3.5.5. na Abordagem Bayesiana.

#### Exemplo 5-2

Supõe-se, a seguir, a existência de uma evidência que apóie a supremacia da Autolatina com um grau de 0.7, mas que não apresente nenhuma razão para a escolha entre Volkswagen e Ford. A crença restante ( $1 - 0.7$ ) é associada a  $\Theta$ , já que as hipóteses são assumidas como exaustivas. Isto resultaria na seguinte distribuição de crenças :

- a)  $m(\{Vw, Ford\}) = 0.7$ ,
- b)  $m(\Theta) = 0.3$  e
- c)  $m = 0$  para os demais subconjuntos de  $\Theta$ .

Neste caso, os bayesianos distribuiriam o grau 0.7 uniformemente entre as hipóteses  $\{Vw\}$  e  $\{Ford\}$ . Contudo, novamente isto significa supor informação além da disponível. A única informação é a de que uma empresa da Autolatina dominará o mercado, mas não há nenhuma evidência específica à Volkswagen ou Ford, nem tão pouco que uma empresa que não seja da Autolatina não dominará o mercado.

Além disso, os bayesianos associariam a crença restante à hipótese da supremacia de uma montadora não-pertencente à Autolatina, ou seja, à negação da hipótese em questão. Esta situação foi discutida quando da apresentação do Paradoxo da Crença, no estudo dos Fatores de Certeza no capítulo 4; item 4.3.5.

#### Exemplo 5-3

Supõe-se uma evidência disconfirmando a supremacia da Volkswagen com um grau de 0.4. Na Teoria da Evidência, a disconfirmação é modelada como a confirmação da negação, ou seja, há um grau de 0.4 de confirmação para a hipótese "Não-Vw". Esta, por sua vez, define o subconjunto  $\{Ford, Fiat, Chev\}$ , resultando em :

- a)  $m(\{Ford, Fiat, Chev\}) = 0.4$ ,
- b)  $m(\Theta) = 0.6$  e
- c)  $m = 0$  para os demais subconjuntos de  $\Theta$ .

Na Teoria da Evidência, não é necessário distribuir a incerteza a cada uma das empresas do subconjunto, como a Teoria Bayesiana o faz. Dempster e Shafer apresentam mecanismos que permitem representar este tipo de evidência, bem como o comportamento de cada hipótese quando surgem novas evidências no processo de solução.

### 5.3.3. A Função de Crença

O valor  $m(A)$  significa a crença que alguém associa exatamente a  $A$  e não a crença total em  $A$  [SHA76]. Esta parcela de crença não pode ser subdividida entre os subconjuntos de  $A$  e não inclui a crença associada a estes subconjuntos. Além disso, a crença em um subconjunto  $A$  evidentemente engloba a crença em subconjuntos que contenham  $A$ . Analogamente, para se determinar a crença total no subconjunto  $A$ , deve-se somar as crenças associadas aos seus subconjuntos próprios. Esta soma caracteriza a *Função de Crença*  $Cr$ .

#### Definição 5-2 [SHA76]

Uma função  $Cr: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$  é chamada uma *Função de Crença* sobre  $\Theta$  se, para alguma probabilidade básica associada  $m: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ , seu valor é dado por :

$$Cr(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$$

Uma Função de Crença, portanto, correspondendo a uma probabilidade básica associada específica  $m$ , associa para todo subconjunto  $A$  de  $\Theta$  a soma das crenças atribuídas exatamente a qualquer subconjunto de  $A$  por  $m$  [GOR84]. Considerando o exemplo das vendas de veículos, uma função de Crença possível é :

$$Cr (\{Vw, Ford, Fiat\}) = m (\{Vw, Ford, Fiat\}) + m (\{Vw, Ford\}) + \\ m (\{Vw, Fiat\}) + m (\{Ford, Fiat\}) + \\ m (\{Vw\}) + m (\{Ford\}) + m (\{Fiat\})$$

Do exemplo anterior, nota-se que  $Cr$  e  $m$  são iguais somente para conjuntos unitários. Para qualquer outro subconjunto  $A$  de  $\Theta$ , a crença  $Cr (A)$  é a soma dos valores de  $m$  para os subconjuntos contidos por  $A$ . Pela definição da probabilidade básica associada,  $Cr (\Theta)$  é sempre igual a 1. Isto intuitivamente é óbvio, já que, como as hipóteses são exaustivas, a crença total em seu conjunto universo  $\Theta$  deve somar 1 [GOR84].

No exemplo 5-2, as funções de crença resultantes são :

$$\begin{aligned} a) Cr (\{Vw, Ford\}) &= m (\{Vw, Ford\}) + m (\{Vw\}) + m (\{Ford\}) \\ &= 0.7 + 0 + 0 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$b) Cr (\{A / A \neq \{Vw, Ford\} \text{ e } A \neq \Theta\}) = 0 \quad e$$

$$\begin{aligned} c) Cr (\Theta) &= m (\Theta) + m (\{Vw, Ford\}) + \\ &\quad m (\{A / A \neq \{Vw, Ford\} \text{ e } A \neq \Theta\}) \\ &= 0.3 + 0.7 + 0 \\ &= 1.0 \end{aligned}$$

#### 5.3.4. A Combinação das Funções de Crença.

Durante o processo de raciocínio, as observações do especialista são incrementais. A cada nova observação, o perito reavalia suas crenças nas hipóteses prováveis. Esta capacidade de combinar múltiplas observações e reavaliar (atualizar) as chances de cada hipótese deve estar presente na técnica que modela o tratamento de incerteza do especialista.

A Teoria da Evidência combina as observações através de uma regra aplicada às suas respectivas funções de crença. Trata-se da *Regra de Combinação de Dempster*. Esta regra constitui o mecanismo pelo qual se pode atualizar os valores de crença dos subconjuntos de  $\Theta$  quando uma nova evidência é adquirida. Pela Regra de Dempster, dadas duas funções de crença  $Cr_1$  e  $Cr_2$ , baseadas em duas observações com o mesmo quadro de discernimento,



pode-se computar uma nova função de crença  $Cr_1 \oplus Cr_2$  que representa o impacto da evidência (observação) combinada.

#### 5.3.4.a. Combinando Duas Funções de Crença

Dadas  $Cr_1$  e  $Cr_2$  e  $m_1$  e  $m_2$  denotando duas funções de crença e suas respectivas *pba's*, a regra de Dempster computa uma *pba* atualizada, denotada  $m_1 \oplus m_2$ , representando o efeito combinado de  $m_1$  e  $m_2$ . A função de crença correspondente é denotada por  $Cr_1 \oplus Cr_2$  e calculada pela definição da função de crença aplicada ao valor de  $m_1 \oplus m_2$ . O cálculo de  $m_1 \oplus m_2(A)$ , onde  $A$  é um conjunto qualquer de  $\Theta$ , é a soma de todos os produtos da forma  $m_1(X).m_2(Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  assumem todos subconjuntos cuja intersecção é  $A$ .

Shafer [SHA76] ilustra a Regra de Dempster dispondo os conjuntos afetados por  $m_1$  e  $m_2$  em um quadro, onde uma célula  $i,j$  representa a intersecção dos conjuntos  $X_i$  associado a  $m_1$  e  $Y_j$  associado a  $m_2$ , respectivamente. O mecanismo de atualização dos valores de crença e a formação deste quadro de intersecções são melhor visualizados no exemplo a seguir.

#### Exemplo 5-4

Suponha-se a existência das duas evidências parciais dos exemplos 5-2 e 5-3 anteriores com relação à dominância nas vendas dos membros de  $\Theta = \{Vw, Ford, Fiat, Chev\}$ . A primeira evidência apóia a supremacia das empresas da Autolatina com grau  $m_1 = 0.7$ , enquanto a segunda apóia o subconjunto  $\{Vw, Ford, Chev\}$  com grau  $m_2 = 0.6$ . A consideração das duas evidências em conjunto modifica os valores de crença dos subconjuntos de  $\Theta$ . Estes novos valores são obtidos pela regra de Dempster, baseando-se em  $m_1$  e  $m_2$ .

Esta atualização nos valores de crença dos subconjuntos de  $\Theta$  pode ser sintetizada através do quadro de intersecções da figura 5-4, a seguir.

		$m_2$	
$m_1$		$\{Ford, Fiat, Chev\}$ (0.40)	$\ominus$ (0.6)
	$\{Vw, Ford\}$ (0.7)	$\{Ford\}$ (0.28)	$\{Vw, Ford\}$ (0.42)
	$\ominus$ (0.3)	$\{Ford, Fiat, Chev\}$ (0.12)	$\ominus$ (0.18)

FIGURA 5-4 : Exemplo de Aplicação da Regra de Dempster.

A expressão que define  $m_1 + m_2$  permite a omissão dos subconjuntos de  $\ominus$  para os quais estas  $pba$ 's são nulas, uma vez que com  $m_1(X)$  e/ou  $m_2(Y)$  nulo(s), o produto  $m_1(X).m_2(Y)$  resultará em um valor nulo para  $m_1 \oplus m_2(A)$ , sendo  $A$  a intersecção de  $X$  e  $Y$ . Os valores de  $m_1 \oplus m_2$  são facilmente obtidos e são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 m_1 \oplus m_2(\{Ford\}) &= 0.28 \\
 m_1 \oplus m_2(\{Vw, Ford\}) &= 0.42 \\
 m_1 \oplus m_2(\{Ford, Fiat, Chev\}) &= 0.12 \\
 m_1 \oplus m_2(\ominus) &= 0.18 \\
 m_1 \oplus m_2 &= 0 \text{ para qualquer outro subconjunto de } \ominus.
 \end{aligned}$$

Como lembram Gordon e Shortliffe, os valores de  $Cr_1 \oplus Cr_2$  são um pouco mais complexos. A seguir alguns são apresentados.

$$\begin{aligned}
 Cr_1 \oplus Cr_2 (\{Vw, Ford\}) &= m_1 \oplus m_2(\{Vw, Ford\}) + m_1 \oplus m_2(\{Vw\}) + \\
 &\quad m_1 \oplus m_2(\{Ford\}) \\
 &= 0.42 + 0 + 0.28 \\
 &= 0.60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Cr_1 \oplus Cr_2 (\{Ford, Fiat, Chev\}) &= m_1 \oplus m_2(\{Ford, Fiat, Chev\}) + \\
 &\quad m_1 \oplus m_2(\{Ford, Fiat\}) + \\
 &\quad m_1 \oplus m_2(\{Ford, Chev\}) + \\
 &\quad m_1 \oplus m_2(\{Fiat, Chev\}) + \\
 &\quad m_1 \oplus m_2(\{Ford\}) + m_1 \oplus m_2(\{Fiat\}) + \\
 &\quad m_1 \oplus m_2(\{Chev\}) \\
 &= 0.12 + 0 + 0 + 0 + 0.28 + 0 + 0 \\
 &= 0.40
 \end{aligned}$$

$$Cr_1 \oplus Cr_2 (\{Vw, Ford, Chev\}) = Cr_1 \oplus Cr_2 (\{Vw, Ford\}) = 0.6$$

uma vez que :

$$\begin{aligned}
 m_1 \oplus m_2(\{Vw, Ford, Chev\}) &= m_1 \oplus m_2(\{Vw, Chev\}) = \\
 m_1 \oplus m_2(\{Ford, Chev\}) &= 0
 \end{aligned}$$

## 5.3.4.b. Condições Necessárias

Uma vez que a combinação de funções de crença resulta em outra função de crença, o resultado das operações de conjunção deve satisfazer as seguintes condições :

## 5.3.4.b1. A Soma das Crenças

$$\sum_{\substack{i,j \\ X_i \cap Y_j = A}} m_1 \oplus m_2 (A) = 1, \text{ onde } A \text{ percorre todos subconjuntos de } \Theta$$

Esta condição está garantida pela expressão que define  $m_1 \oplus m_2$  [GOR84]:

$$m_1 \oplus m_2 = \sum m_1(X) . \sum m_2(Y) = 1 \times 1 = 1$$

Quando o mesmo conjunto aparecer em mais do que uma das células no quadro anterior, o valor de  $m_1 \oplus m_2$  para este conjunto surge da expressão acima<sup>18</sup>.

## 5.3.4.b2. Comutatividade

Uma questão importante na conjunção de evidências, já ressaltada no Capítulo IV (item 4.3.8.a3), é a comutatividade da operação que as combina, isso porque a ordem pela qual o perito considera suas observações não deve alterar seu julgamento final. A operação  $m_1 \oplus m_2$  preserva a comutatividade, pois é definida pelo produto.

## 5.3.4.b3. A Crença Associada Ao Conjunto Vazio

Uma das condições necessárias às funções de crença é :

$$m_1 \oplus m_2 (\emptyset) = 0$$

Esta condição é problemática nos casos em que o quadro das intersecções contiver células nulas. Tal situação não pode ser

---

<sup>18</sup> Esta situação está ilustrada no exemplo 5-5, para a hipótese  $\{V\omega\}$ .

observada no exemplo anterior, uma vez que qualquer par de conjuntos não nulos considerados tem ao menos um elemento em comum. Contudo, no caso geral, há a possibilidade de se associar produtos não nulos na forma  $m_1(X)m_2(Y)$  quando  $X$  e  $Y$  têm intersecção vazia.

Dempster soluciona a questão "desconsiderando" as intersecções nulas, ou seja, atribuindo o valor zero para  $m_1 \oplus m_2$  quando a intersecção dos conjuntos for vazia. Contudo, isto requer uma normalização nos demais valores de  $m_1 \oplus m_2$ . Inicialmente determina-se  $k$ , a soma dos valores não nulos associados ao conjunto  $\emptyset$ . A seguir, após designar 0 para  $m_1 \oplus m_2(\emptyset)$ , divide-se todos os outros valores de  $m_1 \oplus m_2$  por  $1-k$ <sup>19</sup>. Analiticamente,  $k$  é determinado pela seguinte expressão :

$$k = \sum_{\substack{i, j \\ X_i \cap Y_j = \emptyset}} m_1(X_i) \cdot m_2(Y_j)$$

Assim, supondo  $X_i$  e  $Y_j$  anteriores no mesmo quadro de discernimento  $\Theta$  com as respectivas pba's  $m_1$  e  $m_2$  associadas, a probabilidade básica associada, resultante da aplicação da Regra de Dempster é a seguinte:

$$m(A) = \frac{\sum_{\substack{i, j \\ X_i \cap Y_j = A}} m_1 \cdot m_2(A)}{1 - k}$$

onde  $A$  é todo conjunto não-vazio de  $\Theta$ .

Shafer [SHA76] denomina a função de crença dada por  $m$  de soma ortogonal de  $Cr_1$  e  $Cr_2$ , denotada por  $Cr_1 \oplus Cr_2$ . Esta

<sup>19</sup> Gordon e Shortliffe [GORS84] lembram que esta operação preserva a soma 1 para os novos valores, satisfazendo a definição da pba. Se  $a+b+c = 1$ , então também  $(a+b)/(1-c) = 1$  ou  $a/(1-c) + b/(1-c) = 1$ .

normalização nos valores de  $m$  quando houver intersecções vazias será exemplificada na seção seguinte, no exemplo 5-5.

#### 5.3.4.c. Combinando Várias Funções de Crença

A Regra de Combinação de Dempster é aplicável a pares de funções de crença. Contudo, quando aplicada repetidamente, esta regra pode combinar qualquer número de funções de crença. Como Shafer ilustra em [SHA76], para se combinar  $n$  funções de crença  $Cr_1, \dots, Cr_n$ , pode-se formar somas ortogonais par a par :

$$\begin{aligned} &Cr_1 \oplus Cr_2, \\ &(Cr_1 \oplus Cr_2) \oplus Cr_3, \\ &((Cr_1 \oplus Cr_2) \oplus Cr_3) \oplus Cr_4, \end{aligned}$$

etc, até que todas as funções  $Cr_i$  estejam incluídas. Shafer [SHA76] lembra que, se a Regra de Dempster preservar seus propósitos, a função de crença  $Cr$  resultante deste processo representa a evidência combinada de todas as evidências presentes em cada estágio (ou cada função  $Cr_i$ ).

#### Exemplo 5-5

Considerando ainda o exemplo 5-4 anterior, toma-se uma situação em que, em suas avaliações do mercado, o perito em previsão de vendas tenha novas evidências que o levam a crer em uma supremacia da Volkswagen com um grau de certeza ( $m_3$ ) de 0.7. Esta nova evidência é tomada em conjunto com o quadro de observações já existente (caracterizado por  $m_4 = m_1 \oplus m_2$  do exemplo 5-4) e resultará em uma atualização nos valores de crença das hipóteses do quadro de discernimento  $\Theta$ . Isto é explicitado a seguir (figura 5-5).

		$m_4 = m_1 \oplus m_2$			
$m_3$		$\{Ford\}$ (0.28)	$\{Vw, Ford\}$ (0.42)	$\{Ford, Fiat, Chev\}$ (0.12)	$\Theta$ (0.18)
	$\{Vw\}$ (0.7)	$\emptyset$ (0.196)	$\{Vw\}$ (0.294)	$\emptyset$ (0.084)	$\{Vw\}$ (0.126)
	$\Theta$ (0.3)	$\{Ford\}$ (0.084)	$\{Vw, Ford\}$ (0.126)	$\{Ford, Fiat, Chev\}$ (0.036)	$\Theta$ (0.054)

FIGURA 5-5 : Exemplo da Aplicação Sucessiva da Regra de Dempster.

Duas importantes situações particulares ocorrem neste exemplo. A primeira é o fato de um conjunto de  $\Theta$  ( $\{Vw\}$ ) aparecer mais que uma vez no quadro de intersecções. Neste caso, sua  $pba$  é a soma dos valores em cada célula onde está o conjunto ( $m(\{Vw\}) = 0.294 + 0.126 = 0.42$ ).

A segunda particularidade do exemplo é a ocorrência de intersecções vazias entre os conjuntos. Segundo o exposto no item 5.3.4.b, o procedimento, neste caso, é calcular o valor de  $k$ , o total de crença associada ao conjunto  $\emptyset$  ( $k = 0.196 + 0.084 = 0.28$ ) e, a seguir, normalizar os valores das  $pba$ 's, dividindo-as por  $1 - k$ . Assim, os valores são:

$m_3 \oplus m_4 (\{Vw\})$	$= (0.294 + 0.126)/(1 - 0.28) = 0.583$
$m_3 \oplus m_4 (\{Ford\})$	$= (0.084)/(1 - 0.28) = 0.117$
$m_3 \oplus m_4 (\{Vw, Ford\})$	$= (0.126)/(1 - 0.28) = 0.175$
$m_3 \oplus m_4 (\{Ford, Fiat, Chev\})$	$= (0.036)/(1 - 0.28) = 0.05$
$m_3 \oplus m_4 (\emptyset)$	$= (0.054)/(1 - 0.28) = 0.075$
$m_3 \oplus m_4$	$= 0$ para os demais conjuntos de $\Theta$ .

Pode-se notar que  $\sum m_3 \oplus m_4 = 1$ , como a definição de uma  $pba$  requer.

### 5.3.5. O Grau de Crença x O Grau de Dúvida

Uma característica já salientada nos capítulos III e IV e ressaltada por Shafer [SHA76] é o fato de a crença do perito em determinada hipótese não ficar totalmente caracterizada pelo grau de crença que ele atribui a esta hipótese. Associado à estimativa de ocorrência de uma proposição  $A$  sempre há um grau de dúvida, que pode ser mensurado pela crença na não ocorrência de  $A$ , ou equivalentemente, na ocorrência de sua negação  $\bar{A}$  (ou  $-A$ ).

Nos termos da Teoria da Evidência, há uma melhor caracterização das relações entre  $Cr(A)$  e  $Cr(\bar{A})$  quando a proposição  $A$  é tomada como subconjunto de  $\Theta$ .  $Cr(A)$  caracteriza o total de crença associada ao subconjunto  $A$  quando todas as evidências foram combinadas. Além disso, a função de crença pode fornecer informações adicionais ao conjunto  $A$  quando aplicada ao

seu complemento  $\bar{A}$ . A quantidade  $1 - Cr(\bar{A})$  expressa a *Plausibilidade* de  $A$ , ou seja, a extensão para a qual a evidência permite que alguém falhe ao duvidar de  $A$  [GOR84]. A crença em  $A$  e sua plausibilidade formam um intervalo, dado por :

$$[ Cr(A), 1 - Cr(\bar{A}) ]$$

Pode-se explicitar o valor da crença no complemento de  $A$  em termos de probabilidade básica associada, evidenciando, assim, que o extremo direito do intervalo acima é maior que o esquerdo.

$$\begin{aligned} 1 - Cr(\bar{A}) &= \sum_{B \subset \Theta} m(B) - \sum_{B \subset \bar{A}} m(B) \\ &= \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \end{aligned}$$

O valor da crença no conjunto  $A$  segue da definição da função de crença, ou :

$$Cr(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$$

Assim, comparando-se as duas expressões , nota-se que :

$$1 - Cr(\bar{A}) \geq Cr(A)$$

As expressões que fornecem  $Cr(A)$  e  $1 - Cr(\bar{A})$  demonstram que a diferença entre estes valores (amplitude do intervalo) é o total de crença associada aos subconjuntos de  $\Theta$  que interceptam  $A$  e que não são seus subconjuntos. Quando  $A$  é um conjunto unitário, estes subconjuntos são todos superconjuntos de  $A$ , o que não é verdade para  $A$  não unitário [GOR84]. Como em [GOR84], ilustra-se o caso em que  $A$  é unitário e igual ao conjunto  $\{Vw\}$  (e  $\bar{A} = \{Ford, Fiat, Chev\}$ ) :

$$1 - Cr(\bar{A}) - Cr(A) = 1 - Cr(\{Ford, Fiat, Chev\}) - Cr(\{Vw\})$$

$$\begin{aligned} \text{onde : } - Cr(\{Ford, Fiat, Chev\}) &= - \sum_{B \cap A = \emptyset} m(B) = \\ &= \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) - 1 \end{aligned}$$

ou seja :

$$- Cr(\{Ford, Fiat, Chev\}) = \{ m(\{Vw, Ford, Fiat\}) + m(\{Vw, Ford, Chev\}) + \\ m(\{Vw, Fiat, Chev\}) + m(\{Vw, Ford\}) + \\ m(\{Vw, Fiat\}) + m(\{Vw, Chev\}) + m(\{Vw\}) \\ + m(\emptyset) \} - 1$$

e

$$- Cr(\{Vw\}) = - m(\{Vw\}).$$

Assim, a extensão do intervalo é dada por :

$$1 - Cr(\bar{A}) - Cr(A) = m(\{Vw, Ford, Fiat\}) + m(\{Vw, Ford, Chev\}) + \\ m(\{Vw, Fiat, Chev\}) + m(\{Vw, Ford\}) + \\ m(\{Vw, Fiat\}) + m(\{Vw, Chev\}) + m(\emptyset)$$

Gordon e Shortliffe [GOR84] apresentam duas interpretações para a extensão do intervalo de crença. Inicialmente, os autores salientam que a crença associada a um superconjunto de  $\{Vw\}$  pode, em um refinamento da evidência, resultar na crença associada a  $\{Vw\}$ . Isto faz com que a extensão do intervalo de crença signifique a parcela da crença total que pode ser adicionada à crença em  $\{Vw\}$ , caso o perito em vendas ignore todas as evidências contrárias à hipótese  $\{Vw\}$ .

Em uma segunda interpretação, a extensão do intervalo de crença pode ser vista como o total de incerteza em relação a uma hipótese, dado uma evidência. Esta incerteza é caracterizada por uma crença que não é associada nem à hipótese nem a sua negação [GOR84].

### 5.3.6. A Função Bayesiana no Contexto da Teoria da Evidência

Uma análise do significado do intervalo de crença permite que se trace uma das diferenças fundamentais entre a Teoria da Evidência e a Teoria Bayesiana. No caso bayesiano,  $Cr(A) + Cr(\bar{A}) = 1$ , ou seja, os extremos do intervalo de crença são iguais e sua amplitude torna-se nula. No modelo de Dempster e Shafer, contudo, esta amplitude geralmente não é nula, constituindo a medida de crença que, embora não associada a  $A$ , também não é associada ao seu complemento  $\bar{A}$  [GOR84].



Shafer [SHA76] aborda a questão da comparação entre as duas abordagens mostrando que a função bayesiana é uma função de crença. O autor salienta que a diferença encontra-se no fato de que o caso bayesiano é mais restritivo. Tomando-se os elementos de  $\Theta$  como elementos focais e suas crenças como massas associadas, no caso bayesiano só estão considerados os elementos focais unitários. Além disso, restringe-se a massa associada a ficar apenas no ponto, sem liberdade de movimento [SHA76]. Isto torna a função bayesiana mais simples que as funções de crença gerais, uma vez que ela é uma *Função Ponto*, enquanto a função de crença é formada por um conjunto de funções.

#### 5.4. A COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DA TEORIA DA EVIDÊNCIA

Uma questão relevante quando o interesse na Teoria da Evidência direciona-se ao tratamento de incerteza em Sistemas Especialistas é sua Complexidade Computacional. É desejável em Sistemas Especialistas que o tratamento da incerteza não comprometa a performance do sistema.

Os resultados aqui apresentados baseiam-se nas observações de Henkind e Harrison [HEN88]. Segundo os autores, na Teoria de Dempster e Shafer, o cálculo da certeza em uma hipótese  $h_i$ , dada a evidência  $e_j$ , surge da determinação da  $pba(h_i)$ . Supondo que  $e_j$  seja uma conjunção de  $\rho$  evidências parciais, tem-se que cada uma destas evidências induz uma  $pba$ . Assim, o cálculo da  $pba(h_i)$  envolve  $\rho - 1$  aplicações da Regra de Dempster [HEN88].

Caso  $\Theta$  tenha  $n$  subconjuntos, no pior caso, cada  $pba$  necessitará especificar  $(2^n - 2)$  valores  $m$  (já que  $m(\emptyset) = 0$  e qualquer crença não-atribuída é designada ao quadro de discernimento  $\Theta$ ). Assim, supondo-se a existência de  $m$  evidências parciais possíveis, a complexidade no pior caso é  $(m \cdot (2^n - 2)) = O(m \cdot 2^n)$  [HEN88].

Considerando que  $|\Theta| = n$  e que a Regra de Dempster

calcula produtos sobre todos subconjuntos de  $\Theta$ , existirão  $2^n$  produtos, no pior caso. Assim, a complexidade do tempo no pior caso para combinar duas evidências parciais é  $O(2^n \cdot 2^n) = O(2^{2n})$ . Indutivamente, a complexidade do tempo no pior caso para combinar  $p$  evidências é  $O(2^{p \cdot n})$ .

As complexidades referidas anteriormente ocorrem no caso em que as evidências parciais provocam atualizações nas crenças em todas as hipóteses (todos os subconjuntos de  $\Theta$ ). Quando apenas poucas hipóteses recebem valores não-nulos para a crença  $m$ , há uma significativa redução. Henkind e Harrison [HEN88] exemplificam : pode-se reduzir a complexidade do tempo para uma complexidade linear, assumindo-se que cada evidência parcial ou confirma ou refuta uma proposição simples ao invés de uma disjunção. A variação no número de crenças atualizadas por uma evidência faz com que a complexidade vá de  $O(m)$  no melhor caso (quando cada evidência atualiza somente 1 hipótese) até  $O(m \cdot 2^n)$ , no pior caso.

Henkind e Harrison [HEN88] comentam ainda duas particularidades da Regra de Dempster que afetam a complexidade. A primeira é a exigência da mútua exclusividade das hipóteses, assumida na Teoria da Evidência. Os autores ressaltam que, em muitos domínios de conhecimento (e.g. Medicina), para se garantir esta hipótese, deve-se criar hipóteses adicionais no quadro de discernimento (e.g. doenças complexas para casos clínicos com múltiplas enfermidades). Isto pode aumentar a complexidade (e.g.  $2^n$  hipóteses [HEN88]).

A segunda particularidade da Regra de Dempster é a suposição de que cada evidência parcial  $e_j$  ou está presente ou ausente. Caso as evidências devam ser subdivididas (e.g. febre alta, moderada ou baixa), haveria um acréscimo na complexidade [HEN88].

## CAPÍTULO VI

### TEORIA DOS CONJUNTOS DIFUSOS

#### 6.1. INTRODUÇÃO

A última técnica para o Tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas abordada neste trabalho é a *Abordagem Fundamentada na Teoria dos Conjuntos Difusos*. Este capítulo apresenta uma revisão dos principais procedimentos necessários à sua implementação em Inteligência Artificial.

Inicialmente, faz-se uma revisão das principais vantagens em relação às demais abordagens, apontadas pelos pesquisadores da Teoria Difusa. Posteriormente, apresentam-se os principais fundamentos da Teoria dos Conjuntos Difusos presentes no Tratamento de Imprecisão de Sistemas Especialistas.

Além disso, com a finalidade de explicitar as diferentes formas pelas quais tem-se tratado a imprecisão em sistemas especialistas pela Abordagem Difusa, apresentam-se os fundamentos da Teoria utilizados em Sistemas Especialistas (nos itens 6.3 e 6.4), a implementação como *shell* para sistemas especialistas (item 6.5) e um exemplo de inferência difusa incorporando o perfil do decisor às regras formuladas pelo especialista (item 6.6).

##### 6.1.1. As Principais Críticas aos Métodos Tradicionais

Possivelmente, a primeira questão que se impõe no estudo da Teoria dos Conjuntos Difusos como técnica de tratamento de imprecisão em sistemas especialistas é : "por que esta teoria e não as convencionais ?". Vários autores têm abordado esta questão ([ZAD83b], [ZAD86], [ZIM85], etc). Suas observações salientam as situações em que as técnicas tradicionais são inadequadas e sublinham a utilização da Lógica Difusa como alternativa, como poder-se-á observar nesta e na próxima seção.

Os questionamentos dos pesquisadores da corrente difusa com relação às técnicas tradicionais concentram-se na natureza da imprecisão presente no raciocínio e linguagem humanos. Zadeh expressa este questionamento : "*A falha principal nos sistemas tradicionais está baseada no fato de que a incerteza em sistemas especialistas é, na essência, possibilística ao invés de probabilística.*" [ZAD83b]. Mais especificamente, a Teoria da Probabilidade fundamenta-se na lógica de duplo-valor e, como tal, não admite a ocorrência de determinado evento com um certo grau. Esta característica torna a teoria inadequada no tratamento de imprecisão caracterizada por predicados difusos como *pequeno, curto, quente* ou por quantificadores difusos como *maioria, muitos, alguns* [ZAD86].

Especificamente aplicados a sistemas especialistas, os métodos baseados em Lógica de duplo-valor ou Teoria da Probabilidade têm sido questionados nas hipóteses que sustentam seus procedimentos. Conforme Zadeh :

*"A hipótese questionada é o fato de se associar a cada premissa um fator de certeza numérico e, então, ter-se o fator de certeza da conclusão como um número que pode ser expresso como uma função dos fatores de certeza das premissas."* [ZAD83b]

Zadeh conclui seu questionamento afirmando que o único modo de resgatar a validade da transmissão de imprecisão das premissas às conclusões é através da adoção de fatores de certeza difusos ao invés de rígidos.

A seguir sintetizam-se as principais situações em que os métodos tradicionais não apresentam soluções adequadas.

#### 6.1.1.a. Situações Não-Modeláveis por Técnicas Tradicionais

Zadeh [ZAD83] relaciona 3 principais situações de imprecisão em sistemas especialistas não consideradas por técnicas tradicionais.

6.1.1.a1. *A Difusão de Antecedentes e/ou Conseqüentes em Regras da Forma:*

- (a) SE  $X$  é  $A$  ENTÃO  $Y$  é  $B$
- (b) SE  $X$  é  $A$  ENTÃO  $Y$  é  $B$  com  $FC = \alpha$

onde o antecedente,  $X$  é  $A$ , e o conseqüente,  $Y$  é  $B$ , são proposições difusas e  $\alpha$  é o valor numérico do fator de certeza  $FC$ . O exemplo ilustrado por Zadeh [ZAD83b] é :

SE  $X$  é pequeno ENTÃO  $Y$  é grande com  $FC = 0.8$

Aqui tanto o antecedente ( $X$  é pequeno) como o conseqüente ( $Y$  é grande) são proposições difusas, uma vez que as denotações dos predicados *pequeno* e *grande* são subconjuntos difusos PEQUENO e GRANDE da linha real.

6.1.1.a2. *O Cobrimento Parcial entre o Antecedente de uma Regra e uma Fato Fornecido pelo Usuário*

fato :  $X$  é  $A^*$   
regra : SE  $X$  é  $A$  ENTÃO  $Y$  é  $B$  com  $FC = \alpha$

Como exemplo, pode-se tomar a regra anterior, "SE  $X$  é pequeno ENTÃO  $Y$  é grande com  $FC = 0.8$ ", onde  $X$  significa a altura humana. Caso o valor fornecido a  $X$  pelo usuário fosse 1,60m, haveria um cobrimento parcial na regra, devido à pertinência de 1,60m ao conjunto difuso dos valores de "ALTURA PEQUENA".

Aqui reside uma das principais críticas aos métodos convencionais. Zadeh [ZAD83b] afirma que este tipo de situação é evitado em sistemas tradicionais, uma vez que o cobrimento parcial não pode ser tratado dentro da abordagem da lógica de duplo-valor.

6.1.1.a3. *A Presença de Quantificadores Difusos no Antecedente e/ou Conseqüente de uma Regra*

Os quantificadores difusos (e.g. maioria, muitos, poucos, geralmente, muitos dos, etc) estão freqüentemente presentes no conhecimento humano. Zadeh [ZAD83b] apresenta um exemplo oportuno também para elucidar o mecanismo de "tradução" de disposições (proposição com quantificadores difusos) em regras.

disposição  $d \triangleq$  Os Estudantes são Jovens,  
que pode ser interpretado por :

proposição  $p \triangleq$  A Maioria dos Estudantes é Jovem  
que, por sua vez, pode ser expressa como regra ou  
equivalentemente como proposição condicional :

regra  $r \triangleq$  SE  $X$  é um Estudante ENTÃO é provável que seja Jovem

onde a probabilidade difusa "provável" tem o mesmo significado  
expresso como um subconjunto difuso de intervalo unitário que o  
quantificador difuso maioria.

Estas três situações comprometem as conclusões oriundas  
de tratamento tradicional, pois este manipula fatos e regras  
difusos em realidade como sendo não-difusos. Assim, as conclusões  
em sistemas especialistas convencionais têm sua validade aberta a  
questionamentos [ZAD83b].

Além disso, exemplos são apresentados na literatura  
([ZAD83a], [ZAD83b], [ZAD86]) onde a hipótese probabilística de  
que a probabilidade de ocorrência de um evento é o complemento da  
probabilidade da sua não-ocorrência não está correta quando o  
evento em questão for difuso. Zadeh [ZAD83b] caracteriza este fato  
como sendo o "principal truismo" em S.E's tradicionais,  
especificando-se :

$$(6-1) \quad P(H/E) = 1 - P(-H/E)$$

onde  $P(H/E)$  é a probabilidade condicional da hipótese  $H$  dada uma  
evidência  $E$  e  $-H$  é a negação de  $H$ . Zadeh afirma que quando  $E$  é uma  
proposição difusa, a conclusão correta é :

$$(6-2) \quad \Pr \{H/E\} + \Pr \{-H/E\} \geq 1.00$$

a qual é menos rígida do que a expressão 6-1.

#### 6.1.2. As Principais Razões Para o Uso da Teoria dos Conjuntos Difusos em Sistemas Especialistas - [ZIM85]

A fim de justificar a aplicação da Teoria dos Conjuntos Difusos para o tratamento da imprecisão em sistemas especialistas,

Zimmerman [ZIM85] relaciona 3 relevantes necessidades nos mesmos:

#### 6.1.2.a. Interfaces em Linguagem Natural

Não considerar a semântica associada à linguagem natural é reduzir o poder de expressão e comunicação humana, uma vez que esta é a forma natural com que o conhecimento é tratado pelo ser humano [KAU77]. Além disso, a utilização de linguagem natural torna universal a interface do sistema, no sentido de independência do usuário. A utilização de *variáveis Linguísticas* direciona-se ao tratamento desta questão [ZIM85].

#### 6.1.2.b. A Difusão na Base de Conhecimento

A consideração de regras dotadas de difusão como as anteriormente mencionadas, é uma consequência natural do processo de tradução do conhecimento humano na base de conhecimento (BC) do sistema especialista. Como Zadeh [ZAD83b] afirma, o conhecimento humano é essencialmente impreciso e isto geralmente reflete-se na BC dos sistemas especialistas. O tratamento desta imprecisão no conhecimento é apropriado a técnicas de Conjuntos Difusos [ZIM85].

#### 6.1.2.c. A Capacidade Inferencial de Transmitir Imprecisão

Segundo Zadeh [ZAD83b], a questão básica no projeto de sistemas especialistas é como equipá-los com uma capacidade computacional para analisar a transmissão de imprecisão das premissas para a conclusão e associar a esta o comumente chamado fator de certeza. Esta medida deve ser compreensível e interpretável pelo usuário [ZIM85]. Os pesquisadores da área Difusa atribuem esta capacidade ao poder inferencial da Lógica Difusa.

### 6.2. A TEORIA DOS CONJUNTOS DIFUSOS

Desde sua criação, em 1965 (ZAD65)], a Teoria dos Conjuntos Difusos tem sido aplicada nas mais diversas áreas de conhecimento. Os princípios que fundamentam a teoria permitiram que novas abordagens fossem dadas a áreas onde técnicas tradicionais não apresentam respostas satisfatórias. Tais

situações são caracterizadas pela ineficiência da adoção de simplificações à realidade, devendo-se modelá-la o mais fidedignamente possível.

Nos mais diferentes contextos científicos, a aproximação dos modelos à realidade apresenta duas importantes características: de um lado, a linguagem do modelo deve aproximar-se o máximo possível da linguagem do domínio [ZIM85]; por outro lado, a modelagem em busca da realidade invariavelmente pressupõe a manipulação da imprecisão, não só no sentido da insuficiência de informação como também na caráter vago no significado da mesma.

Em uma de suas primeiras publicações, Zadeh, caracterizava :

*A noção de um conjunto difuso providencia um conveniente ponto de partida para a construção de uma estrutura que é paralela em muitas relações à estrutura usada no caso de conjuntos ordinários, mas é mais geral que esta e, potencialmente, pode-se provar ter um escopo muito mais amplo de aplicabilidade, particularmente nos campos da classificação de padrões e processamento de informação. Essencialmente, tal ferramenta providencia um modo natural de tratar problemas nos quais a origem da imprecisão está na ausência de critérios rigidamente definidos de classe de pertinência ao invés de estar na presença de variáveis randômicas" [ZAD65]*

Basicamente, a Teoria dos Conjuntos Difusos procura tratar a imprecisão inerente à linguagem e raciocínio humanos por elementos que não guardam a modelagem conceitual rígida da Lógica de duplo-valor.

Muitas têm sido as formas de introduzir os conceitos que Zadeh [ZAD65] caracterizou ao propor a *Teoria dos Conjuntos Difusos*, em 1965. Dentre estas, a forma mais ilustrativa parece ser a que propõe a conceitualização clássica a conjuntos cujos limites não são rigidamente definidos e, a seguir, enfatiza a necessidade de uma generalização dos mesmos para o tratamento em tais situações.



Dentre os exemplos que ilustram a má-definição das fronteiras de determinados conjuntos, há uma criativa e corriqueira situação proposta por Cohen [COH85]. Trata-se de uma caracterização comum aos apreciadores de cerveja : saber se ela está gelada ou não. Como enfatiza Cohen, todos sabemos responder esta questão e tratamos o conceito "gelado" para a cerveja sem problemas, quando definido apenas intuitivamente. No entanto, caso fôssemos levados a responder determinadas questões que tencionassem caracterizar o conceito "gelado" em termos de temperatura, encontraríamos dificuldades. Não sabemos precisar quando a cerveja deixa de estar gelada e passa a quente (por exemplo, será que em  $12^{\circ}\text{C}$  a cerveja está gelada e a  $13^{\circ}\text{C}$  não ?). Outra dificuldade é fixar-se o ponto (temperatura) no qual um copo de cerveja gelada deixado ao sol passa a não ser mais gelado. Na verdade, a dificuldade é originária do fato de estes limites rígidos inexístirem.

Uma discussão análoga é proposta por Negoita [NEG85] em relação ao conceito "homem baixo". No caso anterior, pode-se pensar que um copo de cerveja em  $5^{\circ}\text{C}$  é "gelado" e que um aumento em sua temperatura de  $0.5^{\circ}\text{C}$  não o torna "quente". A questão que surge é : até quando este procedimento inalteraria o estado "gelado" do copo ? Torna-se clara, agora, a dificuldade de se representar o conceito "gelado" em termos de conjunto clássico, devido à impossibilidade de se traçar explicitamente os limites de definição de cada conceito.

Como lembra Negoita [NEG85], uma tentativa seria adotar três classes e não duas : uma primeira composta por copos claramente gelados, uma segunda composta por copos claramente quentes e uma terceira de copos que não se enquadram nas duas primeiras. Geralmente diz-se que esta última classe é constituída dos casos limítrofes que, unidos, ocupam uma "penumbra" [NEG85].

Toma-se um elemento na "penumbra", ou seja, um copo que não está nem claramente gelado nem quente. Considerando ainda as

três classes anteriores, deve-se rejeitar a premissa indutiva "um copo não deixa de estar gelado pelo aumento de  $0.5^{\circ}\text{C}$  em sua temperatura" uma vez que, para algum copo gelado, este aumento de temperatura coloca-o na linha entre a classe da "penumbra" e a classe dos copos quentes. Novamente, somos forçados a reconhecer um limite rígido entre um caso claro e a penumbra. Tal fato é inaceitável.

Em realidade, há conceitos que são essencialmente vagos, não havendo como caracterizá-los rigidamente, a não ser de modo arbitrário e insatisfatório. Evidentemente, a discussão anterior é aplicável a situações de real interesse no domínio de conhecimento humano ao qual se tem direcionado a aplicação de sistemas especialistas. Afirmações como "alta inflação", "preço baixo" ou "reservatório quase cheio" igualmente não podem ser caracterizadas da maneira clássica. Além disso, conceitos deste tipo não caracterizam variáveis randômicas. O ser humano não considera o conceito "gelado" como um intervalo de uma distribuição de probabilidade de temperaturas, o que torna inadequado o tratamento probabilístico.

Esta problemática caracteriza o alvo principal da Teoria Difusa de Zadeh [ZAD65]. O conceito de pertinência de um elemento  $x$  a um conjunto  $A$  é estendido da forma clássica ( $x$  pertence a  $A$  ou  $x$  não pertence a  $A$ ) para uma forma difusa ( $x$  pertence a  $A$  com um grau de pertinência  $\mu_A(x)$ ). Assim, por exemplo ([COH85]), um copo de cerveja quente é marginalmente um membro do conjunto de objetos gelados. Além disso, o tratamento de imprecisões como as anteriores é *possibilístico* ao invés de *probabilístico*, como poder-se-á verificar no estudo da *Teoria Possibilística*.

Na próxima seção, são abordados os principais conceitos da Teoria dos Conjuntos Difusos. Sugere-se ao leitor interessado em primeiro compreender como a teoria é utilizada em I.A. que vá diretamente à seção 6.3 e retorne à Terminologia quando os conceitos referidos naquelas seções não ficarem totalmente claros. Neste caso, o índice geral pode ser um bom subsídio para

orientação.

### 6.2.1. Terminologia

Nesta seção, uma série de conceitos da Teoria Difusa são abordados. Cabe salientar que o estudo e aplicação da Teoria Difusa têm aumentado significativamente desde sua primeira publicação (i.e. [ZAD65]). Desta forma, o escopo da teoria abrange diversas áreas do conhecimento. No presente trabalho, contudo, a finalidade é providenciar subsídios ao problema do tratamento de imprecisão em sistemas especialistas, segundo a abordagem difusa. Assim, restringir-se-á o estudo aos conceitos pertinentes a esta questão.

#### 6.2.1.a. Conjunto Difuso - [ZIM85]

Dado  $X$  uma coleção de objetos denotados genericamente por  $x$ , então um conjunto difuso  $\tilde{A}$  em  $X$  é um conjunto de pares ordenados :

$$(6.3) \quad \tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X \}$$

onde  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  é chamada *função de pertinência* ou *grau de pertinência* (também *grau de compatibilidade* ou *grau de verdade*) de  $x$  em  $\tilde{A}$ . Esta função mapeia  $X$  para o espaço de pertinência  $M^{20}$ .

A função de pertinência é definida sobre um subconjunto de números reais cujo supremo é finito. Elementos com um grau zero de pertinência geralmente não são listados.

#### Exemplo 6-1 - [ZIM85]

Suponha que um corretor queira classificar as casas que oferece a seus clientes. Um indicador de conforto para uma casa é o número de dormitórios que possui. Dado  $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  o conjunto dos tipos disponíveis de casas, descrito por  $x = n$  de dormitórios na casa. Então, o conjunto difuso "tipo confortável de casa para uma família de 4 pessoas" pode ser escrito como:

<sup>20</sup> Quando  $M$  contém somente os dois pontos 0 e 1,  $\tilde{A}$  é um conjunto não-difuso e  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  é idêntica à função característica de um conjunto clássico.

$$\bar{A} = \{(1,0.2);(2,0.5);(3,0.8);(4,1.0);(5,0.7);(6,0.3)\}$$

Zimmerman [ZIM85] apresenta as diversas notações de conjuntos difusos que têm sido propostas em literatura, além da presente na definição (6.2.1.a). Para cada uma destas, um exemplo de conjunto difuso é colocado.

#### Exemplo 6-2 - [ZIM85]

Uma notação proposta para conjunto difuso é análoga à de conjunto clássico, ou seja, através da caracterização da função de pertinência, ao invés da listagem dos elementos.

$$\bar{A} = \text{"Números Reais consideravelmente maiores que 10"}$$

$$\text{Notação : } \bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x) / \mu_{\bar{A}}(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}\}$$

#### Exemplo 6-3

Zadeh propôs a seguinte notação :

$$(6-4) \quad \bar{A} = \mu_{\bar{A}}(x_1)/x_1 + \dots + \mu_{\bar{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1} \mu_{\bar{A}}(x_i)/x_i$$

onde  $\bar{A}$  é um conjunto finito ou contável de  $n$  elementos e o símbolo "+" indica a união. Ou ainda :

$$(6-5) \quad \bar{A} = \int_x \mu_{\bar{A}}(x)/x, \text{ quando estiver em universo infinito.}$$

exemplo:  $\bar{A} = \text{"Inteiros próximos a 10"}$

$$\bar{A} = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9 + 1.0/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$$

exemplo:  $\bar{A} = \text{"Reais próximos a 10"}$

$$\bar{A} = \int_{\mathbb{R}} (1 + (x-10)^2)^{-1} / x$$

#### Observações

- i) Segundo Kaufmann [KAU75], um Conjunto Difuso é, na realidade, um subconjunto do conjunto clássico denominado universo, sobre o qual se define Conjunto Difuso e Conjunto Clássico. Assim, na literatura é comum o termo "subconjunto difuso". No presente trabalho, contudo, adotar-se-á o termo "conjunto difuso" por questão de conveniência, analogamente ao que fazem Dubois e Prade [DUB80].
- ii) No presente trabalho, denotar-se-á conjuntos (independentemente do tipo) por letras maiúsculas em grafia "bold". Exceto quando for necessário, a notação de conjunto será a mesma, já que os conjuntos clássicos são um caso particular de conjuntos difusos.

### 6.2.1.b. O Conceito de Clássico de Conjunto x O Conceito Difuso

Muitos matemáticos tomam a noção de conjunto como um conceito primitivo. Entretanto, como comenta Giles [GIL81], mesmo na Teoria Clássica, um conjunto deve sempre ser caracterizado por uma *propriedade* (exceto quando o conjunto é finito). A propriedade é, de fato, um predicado, ou seja, um mapeamento que a cada objeto associa uma proposição. O exemplo apontado pelo autor é o conjunto  $P$  dos números primos. O predicado determinante é "primo", ou seja, o conjunto  $P$  é caracterizado pela associação de cada número  $a$  à proposição " $a$  é primo". Especificar o conjunto  $P$  pressupõe especificar o significado da proposição  $a \in P$  para qualquer objeto  $a$ .

Esta abordagem caracteriza uma nova definição de conjunto. Considerando-se o caso geral, ou seja, quando admite-se proposições dispersivas<sup>21</sup> chega-se exatamente à noção de um Conjunto Difuso de Zadeh [ZAD65]. Quando só se admite proposições rígidas, obtém-se a noção Clássica de um Conjunto.

Esta discussão tem sido o ponto de partida no estudo da Lógica Difusa. Das considerações anteriores, evidencia-se que o conceito de conjunto difuso é mais abrangente que o conceito clássico de conjunto, o qual, a despeito da terminologia, é simplesmente um tipo especial de conjunto difuso [GIL81].

### 6.2.1.c. Suporte de Conjunto Difuso

O suporte de um conjunto difuso  $A$ ,  $\text{supp } (A)$ , é um conjunto clássico de todos os  $x \in X$ , tal que  $\mu_A(x) > 0$ .

---

<sup>21</sup> Giles [GIL81] caracteriza a dispersividade pelo fato de a repetição do experimento não produzir sempre o mesmo resultado. Por exemplo, a proposição "Marcelo é alto", sendo que sua altura é de 1,80m, não encontrará sempre a resposta "verdadeiro" por parte das pessoas.

**Exemplo 6-4**

Tomando-se novamente o exemplo 6-1, o suporte do conjunto difuso  $A$ ,  $\text{supp } (A)$ , é o seguinte conjunto clássico :

$$\text{supp } (A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ou seja, exclui-se os elementos que não pertencem ao conjunto  $A$  (casas com mais de 6 dormitórios).

A generalização do conceito de suporte leva aos conjuntos de nível  $\alpha$ , definidos em (6.2.1.f).

**6.2.1.d. Altura de um Conjunto Difuso**

A altura de um conjunto difuso  $A$ ,  $\text{hcd } (A)$ , é o limite superior (ou supremo) de  $\mu_A(x)$ , ou explicitamente :

$$(6-6) \quad \text{hcd } (A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

**Exemplo 6-5**

Novamente tomando-se o conjunto difuso no exemplo 6-1 o cálculo de sua altura é dado por :

$$\text{hcd } (A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) = \sup \{0.2; 0.5; 0.8; 1.0; 0.7; 0.3\} = 1.0$$

**6.2.1.e. Conjunto Difuso Normalizado**

Como evidenciado em 6.2.1.a, os valores de pertinência não estão necessariamente limitados entre 0 e 1. Se  $\text{Sup}_x \mu_A(x) = 1$  ou, equivalentemente, se a altura do conjunto difuso  $A$  for 1, então o conjunto  $A$  é chamado conjunto difuso normalizado ou normal.

Um conjunto difuso  $A$  não-vazio pode ser normalizado pela divisão dos  $\mu_A(x)$  pelo  $\text{Sup}_x \mu_A(x)$ . Quando conjuntos difusos não forem normalizados, pode-se normalizá-los por este processo. Neste trabalho, assume-se que os conjuntos difusos são sempre normalizados.

**6.2.1.f. Conjuntos de Nível  $\alpha$  ou Cortes- $\alpha$** 

Quando se deseja exibir um elemento  $x \in X$  que tipicamente pertence a um conjunto difuso  $A$ , pode-se exigir que

seu valor de pertinência seja maior que algum limite  $\alpha \in [0,1]$ <sup>22</sup>. O conjunto clássico de tais elementos é o conjunto de nível  $\alpha$  ou corte- $\alpha$   $A_\alpha$  de  $A$ , dado por :

$$(6-7) \quad A_\alpha = \{ x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha \} .$$

Além disso, define-se

$$(6-8) \quad \bar{A}_\alpha = \{ x \in X / \mu_A(x) > \alpha \}$$

como conjunto forte de nível  $\alpha$  ou corte- $\alpha$  forte

A função de pertinência de um conjunto difuso  $A$  pode ser expressa em termos das funções características de seus cortes- $\alpha$ , conforme a expressão :

$$(6-9) \quad \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, \mu_{A_\alpha}(x))$$

#### Exemplo 6-6

Com relação ao exemplo 6-1, pode-se construir os seguintes cortes- $\alpha$  :

$$A_{0.2} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A_{0.5} = \{2,3,4,5\}$$

$$A_{0.8} = \{3,4\}$$

$$A_{1.0} = \{4\}$$

o conjunto forte de nível  $\alpha$  para  $A_{0.8}$  é  $\bar{A}_{0.8} = \{4\}$  .

#### 6.2.1.g. Convexidade

Uma das generalizações que a Teoria dos Conjuntos Difusos exhibe com relação à Teoria Clássica reside no conceito de *convexidade* de um conjunto.

Na Teoria Clássica, "um conjunto não-vazio  $S$  em  $E_n$ <sup>23</sup> é

<sup>22</sup> Embora Dubois e Prade [DUB80] e Kandel [KAN85] excluam o valor nulo para  $\alpha$ , adotando  $\alpha \in ]0,1[$ , Zimmerman [ZIM85] apresenta os conjuntos de nível  $\alpha$  como uma generalização do conjunto suporte  $\text{supp}(A)$  (que ocorre quando  $\alpha = 0$ ).

<sup>23</sup>  $E_n$  significa o espaço euclidiano  $n$ -dimensional, dado pela coleção de todos vetores de dimensão  $n$ .

dito *convexo* se o segmento de reta unindo dois pontos quaisquer do conjunto também pertence ao conjunto." [BAZ79]. Explicitamente, o conjunto  $S$  é convexo se e somente se, dados  $x_1$  e  $x_2$  em  $S$ , os pontos<sup>24</sup>  $\{\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2\}$ , com  $\lambda \in [0,1]$  também pertencem a  $S$ .

Na generalização do conceito de convexidade para os conjuntos difusos, proposta por Zadeh [ZAD65], assume-se o universo  $X$  dos conjuntos difusos como sendo o espaço euclidiano  $n$ -dimensional ( $E_n$ ). Um conjunto difuso  $A$  é *convexo* se e somente se seus cortes- $\alpha$  são convexos. Equivalentemente,  $A$  é convexo se e somente se para  $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]$ ,

$$(6-10) \quad \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

Observa-se que :

A definição anterior não implica que a função de pertinência  $\mu_A$  seja uma função convexa de  $x$  [DUB80] (a figura 6-1 ilustra este fato).

Além disso, analisando-se a definição de convexidade para conjuntos clássicos pode-se dizer que só há sentido em falar em convexidade para conjuntos difusos quando suas funções de pertinência forem contínua por partes. Caso contrário, os conjuntos de nível- $\alpha$  do conjunto difuso não são convexos.

---

<sup>24</sup> Estes pontos são chamados "Combinações Convexas" de  $x_1$  e  $x_2$  [BAZ79].



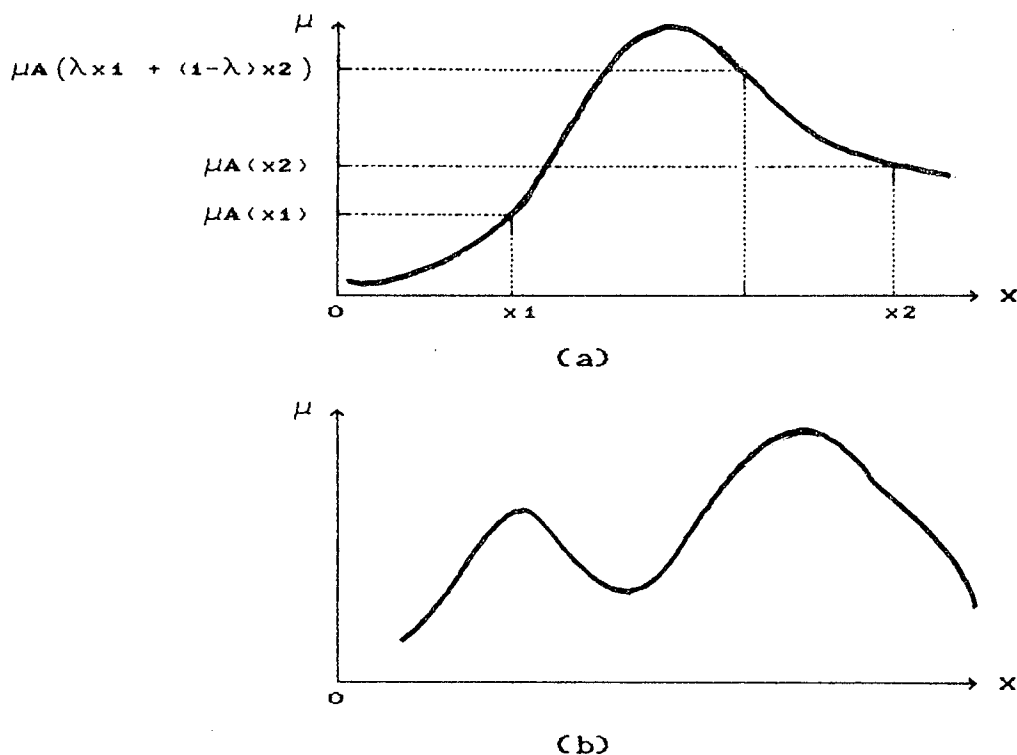


FIGURA 6-1 : (a) Conjunto Difuso Convexo (b) Conjunto Difuso Não-convexo - (FONTE [DUB80], pg. 26) .

#### 6.2.1.h. Número Difuso

Um *Número Difuso* é um conjunto difuso convexo e normalizado  $A$  da linha real  $\mathbb{R}$ , tal que :

- $\exists! x_0 \in \mathbb{R} / \mu_A(x_0) = 1$ , onde  $\exists!$  significa "existe um e somente um" e  $x_0$  é chamado *valor médio* de  $A$ .
- $\mu_A(x)$  é contínua por partes.

Alguns exemplos de números difusos são os conjuntos difusos "pequeno", "aproximadamente 8", "muito próximo a 5", "mais ou menos grande", etc [KAN86].

#### Exemplo 6-7

Considere o seguinte conjunto difuso  $A$  :

$A$  = QUASE 10, com a seguinte função de pertinência:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 8 \text{ ou } x \geq 12 \\ \frac{|x - 8|}{2} & \text{se } 8 < x < 12 \end{cases}$$

O referido conjunto está representado na figura 6-2 e constitui um exemplo de *número difuso triangular*.

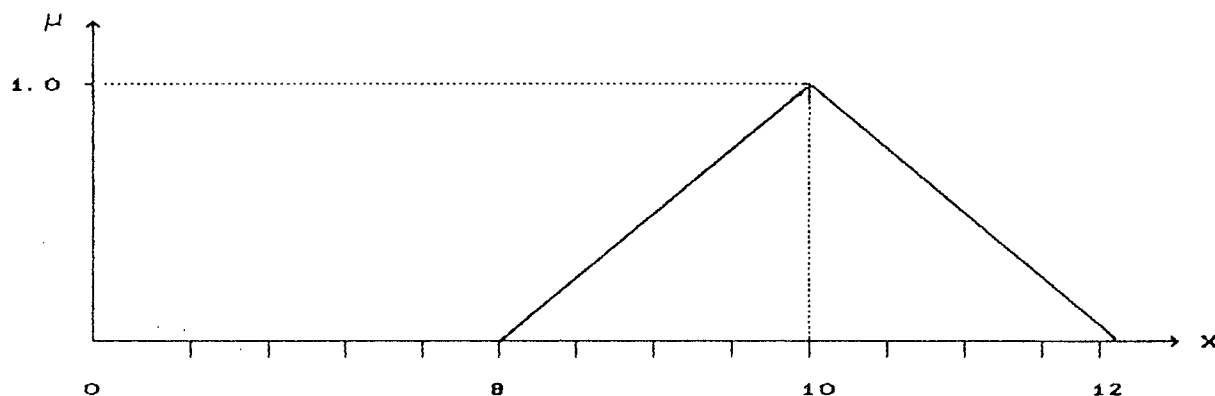


FIGURA 6-2 : Número Difuso Triangular "QUASE 10".

#### 6.2.1.i. Cardinalidade

A *cardinalidade* de um conjunto é o número de elementos presentes no mesmo. Na Teoria Clássica dos Conjuntos, não há nenhuma dificuldade em computar este total de elementos, já que se sabe claramente se um determinado elemento pertence ou não a um conjunto. Mas, na Teoria dos Conjuntos Difusos, como contar o número de elementos em um conjunto ?

O fato de a proposição "*u é um elemento de F*", em Teoria dos Conjuntos Difusos, caracterizar um grau de verdade resulta em uma variedade de definições para cardinalidade [ZAD83a]. Dentre estas, algumas associam um número real ao conjunto difuso *F*, constituindo casos onde a cardinalidade de um conjunto difuso é não-difusa. Outras associam *F* com um número difuso, já que se pode argumentar que a cardinalidade de um conjunto difuso deveria ser um número difuso [ZAD83a]. Neste trabalho, aborda-se apenas a cardinalidade não-difusa. Para o caso da cardinalidade difusa, excelentes exposições podem ser encontradas nos trabalhos de Kandel [KAN86] e Zadeh [ZAD83a].

6.2.1.11. *Cardinalidade Não-Difusa ou Escalar*

A primeira extensão do conceito de cardinalidade para conjuntos difusos fornece um número escalar. Especificamente, quando o conjunto universo  $U$  é finito, a *cardinalidade*  $|A|$  de um conjunto difuso  $A$  em  $U$  é definida por :

$$(6-11) \quad |A| = \sum_{u \in U} \mu_A(u)$$

Deste conceito surge ainda a *cardinalidade relativa*  $\|A\| = |A|/|U|$ , que expressa a proporção de elementos de  $U$  que estão em  $A$  [DUB80].

Algumas considerações de ordem prática são colocadas por Zadeh ([ZAD83a] e [ZAD83b]) com relação ao cálculo de  $|A|$ . O somatório que fornece  $|A|$  pode ser arredondado, se necessário, para o inteiro mais próximo. Além disso, pode-se estipular os termos cujo grau de pertinência está abaixo de um limite específico e excluí-los no cálculo de  $|A|$ . Esta exclusão visa evitar um situação na qual um grande número de termos com baixos graus de pertinência sejam equivalentes na soma a um pequeno número de termos com alta pertinência.

**Exemplo 6-8 - [ZIM85]**

Tomando-se o conjunto difuso  $A$ , "tipo confortável de casa para uma família com 4 pessoas", dado no exemplo 6-1, a cardinalidade de  $A$  é:

$$|A| = 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1.0 + 0.7 + 0.3 = 3.5$$

A cardinalidade relativa é :

$$\|A\| = |A| / |U| = 3.5/10 = 0.35$$

A extensão deste conceito para o caso em que o conjunto universo  $U$  é infinito surge naturalmente de:

$$(6-12) \quad |A| = \int_U \mu_A(u) du$$

que, obviamente, nem sempre existirá. Se o conjunto difuso  $A$  tem um conjunto suporte (6.2.1.c),  $|A| = \sum_{u \in \text{supp}(A)} \mu_A(u)$ .

O conceito de cardinalidade de um conjunto difuso é relevante na manipulação de quantificadores difusos que, por sua vez, é essencial no tratamento de imprecisão em sistemas especialistas pela abordagem difusa. Isto ficará evidenciado posteriormente, no estudo da inferência de proposições quantificadas, como, por exemplo, "na maioria dos meses, o lucro tem sido bom".

#### 6.2.1.j. Imprecisão de um Conjunto Difuso

Wenstop [WEN80] definiu como *imprecisão*,  $Imp$ , de um conjunto difuso a soma de seus graus de pertinência (ou a área coberta por sua distribuição de pertinência) :

$$(6-13a) \quad Imp(A) = \sum_{x \in A} \mu_A(x)$$

ou

$$(6-13b) \quad Imp(A) = \int \mu_A(x).dx, \text{ para } \mu \text{ contínua}$$

#### 6.2.2. Operações com Conjuntos Difusos

Uma das conseqüências naturais à generalização da Teoria Clássica dos Conjuntos para a Teoria dos Conjuntos Difusos é o estudo das operações sobre conjuntos. Segundo Zimmerman [ZIM85], o componente crucial de um conjunto difuso é sua função de pertinência. Assim, é imediato que as operações sobre conjuntos difusos sejam definidas via funções de pertinência.

O subjetivismo, cuja modelagem é um dos principais alvos em Teoria dos Conjuntos Difusos, permite a existência de mais do que uma abordagem às operações em conjuntos difusos, como poder-se-á evidenciar-se nas seções seguintes.

Inicialmente, contudo, far-se-á uma breve revisão das principais operações em conjuntos clássicos ou ordinários, para que as analogias ilustrem os conceitos subjetivos presentes nas operações em conjuntos difusos. Esta abordagem foi

satisfatoriamente ilustrativa no trabalho de Ragade e Gupta [RAG77].

#### 6.2.2.a. Operações Sobre Conjuntos Clássicos

Esta revisão é melhor ilustrada se as operações forem aplicadas a um exemplo de conjunto clássico. Para tal, toma-se o conjunto finito  $A$ , dado pelas "cores em um semáforo", tomado sobre o seguinte conjunto universo  $U$  de cores (diz-se que  $A \subseteq U$ , significando que  $A$  está contido em  $U$ ) :

$U = \{\text{branco (br), amarelo (am), vermelho (vm), preto (pr), verde (vd)}\}$

o conjunto  $A$  é o seguinte :

$$A = \{ \text{am, vm, vd} \}$$

uma maneira alternativa de se definir o conjunto  $A$  sobre  $U$  pode ser :

$A =$	br	0
	am	1
	vm	1
	pr	0
	vd	1

FIGURA 6-3 : Representação Esquemática para um Conjunto Clássico -  
FONTE [RAG77] (modificada).

onde 1 surge no vetor quando o elemento está presente no conjunto  $A$  e 0 quando está ausente. Esta notação vetorial é proposta em [RAG77] e o conjunto  $A$  poderia ser escrito como um vetor linha (i.e. 01101), desde que se preserve a ordem dos elementos em  $U$ . Pode-se também definir  $\mu_A(u)$  como a presença ou ausência de  $u$  em um subconjunto [RAG77]. Assim, poder-se-ia representar o conjunto  $A$  como  $A = \int_{u \in U} (\mu(u)/u)$ , onde  $\mu \rightarrow \{0,1\}$ , associando o valor 1 se  $u \in A$  e 0 quando  $u \notin A$ . A função  $\mu$  é chamada *função característica* do conjunto  $A$ . Se  $A = \int_{u \in U} (0/u)$ ,  $A$  é chamado *conjunto vazio* e denotado por  $\emptyset$  ou pelo vetor 0. Se  $A = \int_{u \in U} (1/u)$ ,  $A$  é chamado *conjunto universo*.

Verifica-se, a seguir, as principais operações sobre conjuntos clássicos, aplicando-se cada uma ao conjunto  $A$  anterior.

#### 6.2.2.a1. Complemento

O complemento de um conjunto clássico  $A$ , denotado por  $-A$  (ou por  $\bar{A}$ ) e definido em um conjunto universo finito  $U$  é dado por :

$$(6-14) \quad -A = \int_{u \in U} (1 - \mu_A(u)) / u$$

significando  $-A$  é composto dos elementos que não estão no conjunto  $A$ .

No caso do conjunto  $A = \{am, vm, vd\}$  anterior, seu complemento é  $-A = \{br, pr\}$ , cuja notação vetorial é 10010.

#### 6.2.2.a2. Igualdade

Um conjunto  $B$  é igual a um conjunto  $A$  se e somente se:

$$(6-15) \quad B = \int_{u \in U} \mu_A(u) / u$$

ou ainda :

$$\forall u \in B, u \in A \text{ e } \forall u \in A, u \in B$$

Considerando-se os conjuntos anteriores (o universo  $U$  das cores e o conjunto  $A$  das cores em um semáforo) e um conjunto  $B$  definido em  $U$  pelas cores cujo nome inicie pelas letras  $a$  ou  $v$ , isto é,  $B = \{am, vm, vd\}$ , tem-se  $A = B$ .

#### 6.2.2.a3. União

A união de dois conjuntos  $A$  e  $B$  tomados no universo  $U$  ( $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq U$ ) é escrita  $A \cup B$ , definindo o seguinte conjunto :

$$(6-16a) \quad A \cup B = \int_{u \in U} (\max \{\mu_A(u); \mu_B(u)\} / u)$$

ou ainda,

$$(6-16b) \quad A \cup B = \{u / (u \in A) \text{ ou } (u \in B)\}$$

ou seja, a função característica  $\mu_{A \cup B}$  associa o máximo dos valores  $\mu_A(u)$  e  $\mu_B(u)$ . Colocado de outra forma, segundo Regade e Gupta

[RAG77], a união detecta a presença do elemento  $u$  em qualquer dos dois conjuntos.

Considerando-se ainda o universo  $U$  das cores e o conjunto  $A$  das cores em um semáforo anteriores e definindo um conjunto  $B$  em  $U$  como o "conjunto das cores cujo nome inicie com a letra  $b$ ", ou  $B = \{br\}$ , tem-se:

$$A \cup B = \{br, am, vm, vd\}$$

#### 6.2.2.a4. Intersecção

A intersecção de dois conjuntos  $A$  e  $B$ , onde  $A \subseteq U$  e  $B \subseteq U$ , é escrita  $A \cap B$  (ou  $A \wedge B$ ) e define o seguinte conjunto :

$$(6-17a) \quad A \cap B = \int_{u \in U} (\min \{\mu_A(u); \mu_B(u)\} / u)$$

ou ainda,

$$(6-17b) \quad A \cap B = \{u / (u \in A) \text{ e } (u \in B)\}$$

isto significa que a intersecção detecta a presença de um elemento  $u$  em ambos os conjuntos.

Tomando-se novamente o universo  $U$  das cores e o conjunto  $A$  das cores em um semáforo anteriores e o conjunto  $B$  como o "conjunto das cores cujo nome inicie com a letra  $v$ ", ou  $B = \{vm, vd\}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{am, vm, vd\} \cap \{vm, vd\} \\ A \cap B &= \{vm, vd\} \end{aligned}$$

#### 6.2.2.a5. Propriedades

Algumas propriedades podem ser concluídas das definições anteriores. Aqui apresenta-se somente uma relação destas propriedades, mas cada uma pode ser devidamente provada.

- |                      |                                  |
|----------------------|----------------------------------|
| i) $-U = \emptyset$  | v) $A \cup -A = U$               |
| ii) $-\emptyset = U$ | vi) $A \cap -A = \emptyset$      |
| iii) $U \cup A = U$  | vii) $-(A \cup B) = -A \cap -B$  |
| iv) $U \cap A = A$   | viii) $-(A \cap B) = -A \cup -B$ |

Com esta revisão, pode-se estender os conceitos da Teoria Clássica dos conjuntos para a Teoria dos Conjuntos Difusos, analogamente ao que Ragade e Gupta [RAG77] fizeram.

Para exemplificar as operações com conjuntos difusos, adota-se os seguintes conjuntos :

$$\begin{aligned} U &= \{ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \} \\ A &= \{ (0.2/u_1); (0.4/u_2); (1.0/u_3); (0.6/u_4); (0.2/u_5) \} \\ B &= \{ (0.3/u_1); (0.3/u_2); (0.5/u_3); (0.4/u_5); (0.2/u_6) \} \end{aligned}$$

#### 6.2.2.b. Complemento de um Conjunto Difuso

Como visto em 6.2.2.a, o complemento de um conjunto é o registro dos elementos no universo deste conjunto que não pertencem a ele. No caso difuso, a extensão natural leva a :

$$(6-18) \quad -A = \int_{u \in U} (\mu_{-A}(u)) / u$$

onde  $\mu_{-A}(u) = 1 - \mu_A(u)$ ,  $u \in U$  é a função de pertinência do conjunto  $-A$ .

#### Exemplo 6-9

Considerando-se o universo  $U$  e o conjunto difuso  $A$  definidos anteriormente, tem-se que o complemento de  $A$  é :

$$-A = \{ (0.8/u_1); (0.6/u_2); (0.4/u_4); (0.8/u_5); (1.0/u_6) \}$$

#### 6.2.2.c. Igualdade de Conjuntos Difusos

Dois conjuntos difusos  $A$  e  $B$  são iguais (diz-se  $A = B$ ) se e somente se :

$$(6-19) \quad \forall u \in U, \mu_A(u) = \mu_B(u).$$

#### 6.2.2.d. União de Conjuntos Difusos

Define-se a união de dois conjuntos difusos  $A$  e  $B$  em  $U$  com as funções de pertinência  $\mu_A$  e  $\mu_B$  respectivamente, por :

$$(6-20) \quad A \cup B = \int_{u \in U} (\max \{ \mu_A(u); \mu_B(u) \}) / u$$

Novamente, a união registra os elementos que pertencem a  $A$  ou a  $B$ . No caso difuso, um elemento pode "pertencer mais" a um dos conjuntos e, subjetivamente, a união deve considerá-lo com sua



pertinência mais alta, como na expressão anterior.

#### Exemplo 6-10

Tomando-se os conjuntos  $U$ ,  $A$  e  $B$  anteriormente definidos, tem-se que:

$$A \cup B = \{ (0.3/u_1); (0.4/u_2); (1.0/u_3); (0.6/u_4); (0.4/u_5); (0.2/u_6) \}$$

#### 6.2.2.e. Intersecção de Conjuntos Difusos

Como visto em 6.2.2.a4, a intersecção denota os elementos que pertencem a ambos os conjuntos em questão. Para o caso em que os conjuntos são difusos, detecta-se a presença pela função de pertinência do conjunto. Isto fornece, para a intersecção de dois conjuntos difusos  $A$  e  $B$  em  $U$ , com as funções de pertinência  $\mu_A$  e  $\mu_B$  respectivamente, a seguinte expressão :

$$(6-21) \quad A \cap B = \int_{u \in U} (\min \{ \mu_A(u); \mu_B(u) \}) / u$$

#### Exemplo 6-11

Considerando-se os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $U$  anteriores, tem-se que :

$$A \cap B = \{ (0.2/u_1); (0.3/u_2); (0.5/u_3); (0.2/u_5) \}$$

#### 6.2.2.f. Inclusão

Segundo a noção de Zadeh [ZAD65],  $A$  é dito incluído em  $B$  ( $A \subseteq B$ ) se e somente se :

$$(6-22) \quad \forall u \in U, \mu_A(u) \leq \mu_B(u).$$

Quando a desigualdade é estrita, diz-se que a inclusão é estrita e denotada como  $A < B$ . Tanto " $\subseteq$ " como " $<$ " são transitivos. Obviamente,  $A = B$  se e somente se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .

#### 6.2.2.g. Produto entre Conjuntos Difusos

O produto de dois conjuntos difusos gera um terceiro conjunto difuso dado por :

$$(6-23) \quad A \cdot B = \int_{u \in U} (\mu_A(u) \cdot \mu_B(u)) / u$$

Deste modo,  $A^\alpha$ , onde  $\alpha$  é qualquer número positivo, pode ser

interpretado como [KAN86]:

$$(6-24) \quad A^\alpha = \int_{u \in U} (\mu_A(u))^\alpha / u$$

Analogamente, se  $\alpha$  é qualquer número real não negativo, tal que  $\sup_u \mu_A(u) \leq 1$ , tem-se :

$$(6-25) \quad \alpha \cdot A = \int_{u \in U} \alpha \cdot (\mu_A(u)) / u$$

Dois casos particulares são relevantes nestas operações : quando  $\alpha$  vale 2, tem-se o quadrado (ou *concentração*) de um conjunto difuso e quando  $\alpha$  vale  $1/2$ , tem-se a raiz quadrada (ou *dilatação*) de um conjunto difuso.

#### 6.2.2.h. Possibilidade Entre um Dado Difuso e um Padrão Difuso

Possibilidade e Necessidade entre um dado difuso e um padrão difuso são úteis na comparação entre dois conceitos difusos semelhantes. Um caso ilustrativo é a comparação entre o dado difuso "muito próximo" e o padrão difuso "próximo".

A Possibilidade do dado difuso  $F_1'$ , dado o padrão difuso  $F_1$ ,  $Pos(F_1/F_1')$ , é obtida por [BON87] :

$$(6-26) \quad \begin{aligned} Pos(F_1/F_1') &= \text{supremo}(F_1 \cap F_1') \\ &= \max [\min(\mu_{F_1}(w), \mu_{F_1'}(w))] \end{aligned}$$

#### 6.2.2.i. Necessidade Entre um Dado Difuso e um Padrão Difuso

A Necessidade do dado difuso  $F_1'$ , dado o padrão difuso  $F_1$ ,  $Nec(F_1/F_1')$ , é obtida por [BON87] :

$$(6-27) \quad Nec(F_1/F_1') = 1 - Pos(-F_1/F_1')$$

Nestas expressões,  $\mu$  é a distribuição de pertinência,  $w$  é o elemento do universo do discurso dos conjuntos difusos envolvidos e  $-F_1$  é o complemento do conjunto difuso  $F_1$ .

Necessidade e Possibilidade foram propostas por Zadeh [ZAD65] e medem o grau de herança e intersecção de duas proposições difusas, representadas por suas distribuições normalizadas de possibilidade. Em outras palavras, a possibilidade

entre o padrão difuso  $F_1$  e o dado difuso  $F_1'$  fornece o máximo de sua intersecção, sendo, portanto, a medida da extensão com a qual eles se sobrepõem [LEU88].

Sob circunstâncias normais, a necessidade reflete três tipos de relações entre dois conjuntos difusos, a saber [LEU88] :

- a)  $Nec(F_1/F_1') > 0.5$  :  $F_1'$  é uma *contração* de  $F_1$
- b)  $Nec(F_1/F_1') = 0.5$  :  $F_1'$  é uma *duplicação* de  $F_1$
- c)  $Nec(F_1/F_1') < 0.5$  :  $F_1'$  é uma *dilatação* de  $F_1$

Embora haja uma relação de consonância entre Possibilidade e Necessidade com Plausibilidade e as Funções de Crença da Teoria da Evidência de Dempster e Shafer, respectivamente [BON87], a plausibilidade de um evento difuso não é um caso particular da noção de possibilidade ou vice-versa. Cada uma destas medidas possui suas próprias características e interesse [SME81]. Dubois e Prade [DUB80] apresentam ilustrativa correlação entre estas e outras medidas de certeza.

#### 6.2.2.j. Similaridade entre Conjuntos Difusos

A similaridade  $m$  é obtida do seguinte algoritmo [LEU88]:

```

SE       $Nec(F_1/F_1') > 0.5$ 
  ENTÃO  $m = Pos(F_1/F_1')$ 
SENÃO   $m = (Nec(F_1/F_1') + 0.5) * Pos(F_1/F_1')$ 

```

onde :

$Pos(F_1/F_1')$  é a "Possibilidade" do dado difuso  $F_1'$ , dado o padrão difuso  $F_1$ , abordada anteriormente.

$Nec(F_1/F_1')$  é a "Necessidade" do dado difuso  $F_1'$ , dado o padrão difuso  $F_1$ , também abordada anteriormente.

A similaridade mede o quanto os dois conceitos difusos representados por dois conjuntos difusos são similares. Quando a necessidade é maior que 0.5 (i.e.  $F_1'$  é uma *contração* de  $F_1$ ), há uma saturação na similaridade e esta é forçada ser igual a possibilidade (geralmente igual a 1 para dois conceitos similares) [LEU88].

Outro tópico da Teoria dos Conjuntos Difusos de interesse no presente trabalho é o estudo das *extensões*. Trata-se, como o nome indica, da extensão de conceitos da Teoria Clássica à Teoria dos Conjuntos Difusos.

Dentre os tópicos de estudo, enquadra-se o *Princípio da Extensão*, de especial interesse no tratamento de imprecisão em sistemas especialistas. O Princípio da Extensão surge no processo de inferência em Lógica Difusa. Especificamente, quando, após terem sido traduzidas (terem seu significado representado), as proposições difusas são abordadas com o objetivo de se encontrar a resposta a uma determinada questão, o processo de inferência desencadeado fundamentar-se-á na aplicação do Princípio da Extensão. Isto será evidenciado posteriormente. Por ora, restringe-se à apresentação dos conceitos teóricos.

### 6.2.3. Princípio da Extensão

Inicialmente, apresenta-se o conceito de *Produto Cartesiano* em Lógica Difusa.

#### 6.2.3.a. Produto Cartesiano de Conjuntos Difusos - [DUB80]

Dado  $X$  o produto cartesiano dos universos  $X_i$  para  $i$  de 1 a  $r$ , ou  $X = X_1 \times \dots \times X_r$ , o *Produto Cartesiano* dos conjuntos difusos  $A_1, \dots, A_r$  em  $X_1, \dots, X_r$ , respectivamente é dado por :

$$A_1 \times \dots \times A_r = \int_{X_1 \times \dots \times X_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)) / (x_1, \dots, x_r)$$

Expressão (6-28)

Em outras palavras, o produto cartesiano de conjuntos difusos tem uma função de pertinência definida por :

$$(6-29) \quad \mu_{A_1 \times \dots \times A_r} = \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r) \}$$

#### Exemplo 6-12 - [KAN86]

Dados  $X_1 = X_2 = \{2, 4, 6\}$  e os conjuntos :

$$A_1 = 0.5/2 + 1/4 + 0.6/6 \text{ e}$$

$$A_2 = 1/2 + 0.6/4$$

então :

$$A_1 \times A_2 = 0.5/(2,2) + 1/(4,2) + 0.6/(6,2) + 0.5/(2,4) + 0.6/(4,4) + 0.6/(6,4)$$

## 6.2.3.b. Princípio da Extensão

Kandel [KAN86] afirma que o *Princípio da Extensão* permite que o domínio de definição de uma relação ou mapeamento seja estendido de pontos no universo  $U$  para conjuntos difusos em  $U$ . Especificamente, se  $f$  for um mapeamento do universo  $X$  para o universo  $Y$  e  $A$  um conjunto difuso em  $X$ , dado por :

$$(6-30) \quad A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n$$

então, o *Princípio da Extensão* permite que a imagem do conjunto  $A$  (que pode ser chamada de  $B$ ) seja conhecida a partir das imagens de seus elementos  $x_1, \dots, x_n$ , ou, explicitamente :

$$f(A) = f(\mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n) \equiv \mu_A(x_1)/f(x_1) + \dots + \mu_A(x_n)/f(x_n)$$

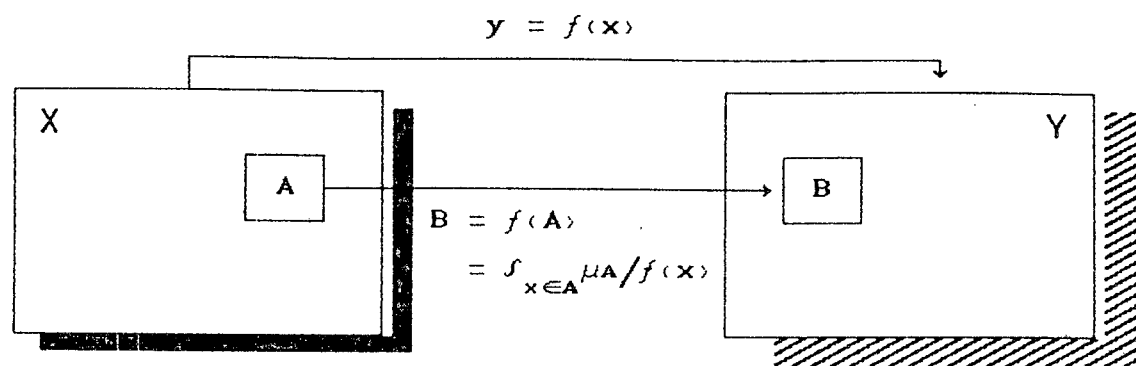
Expressão (6-31)

Genericamente, dado  $f$  um mapeamento do produto cartesiano  $X_1 \times \dots \times X_r$  para o universo  $Y$  tal que  $y = f(x_1, \dots, x_r)$ , o *Princípio da Extensão* permite induzir de  $r$  conjuntos difusos  $A_1, \dots, A_r$  (no produto cartesiano  $X_1 \times \dots \times X_r$ ) um conjunto difuso  $B$  em  $Y$ , através de  $f$ , tal que :

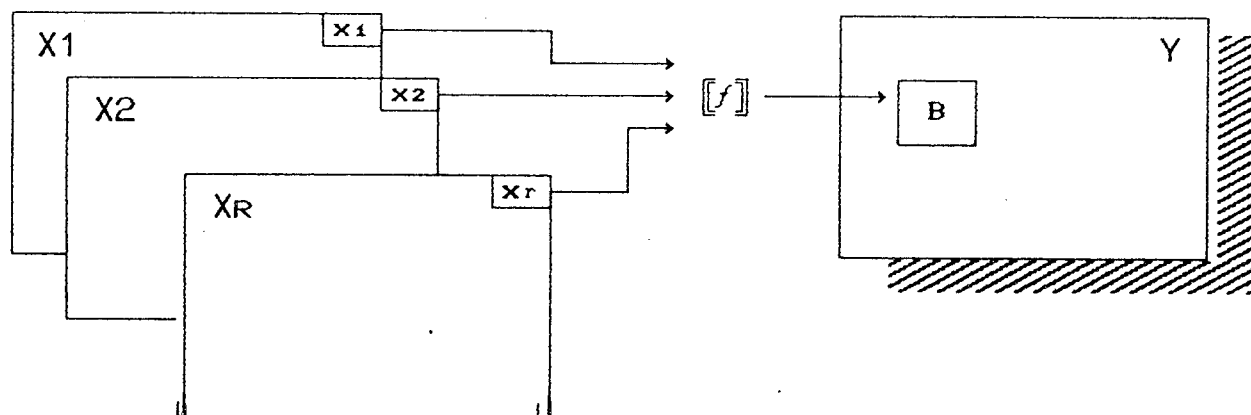
$$(6-32) \quad \mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{x_1, \dots, x_r} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_r}(x_r)) \\ y = f(x_1, \dots, x_r) \\ \\ 0 \text{ se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

onde  $f^{-1}(y)$  é a imagem inversa de  $f$  e  $\mu_B(y)$  é a maior dentre os valores de pertinência  $\mu_{A_1} \times \dots \times \mu_{A_r}(x_1, \dots, x_r)$  de realizações de  $y$  usando  $r$ -uplas  $(x_1, \dots, x_r)$ .

A figura 6-4a, a seguir, ilustra o *Princípio da Extensão* para um caso simples de um único conjunto no universo partida  $X$  sobre o qual se procede o mapeamento  $f$ . Na figura 6-4b, tem-se a generalização do *Princípio da Extensão*, com o universo de partida sendo um produto cartesiano  $X_1 \times \dots \times X_r$ , sobre o qual se aplica o mapeamento  $f$ .



(a) No caso mais simples, tem-se um mapeamento  $f$  de um universo  $X$  para um universo  $Y$ . Dado que  $A$  é um conjunto difuso em  $X$ , o Princípio da Extensão permite que se obtenha a imagem de  $A$  (denominada  $B$ ) no universo  $Y$ , a partir das imagens dos elementos do conjunto  $X$  e da função de mapeamento  $f$ .



(b) No caso genérico, ao invés de se ter um universo  $X$ , há um produto cartesiano  $X_1 \times \dots \times X_r$  que é mapeado para o universo  $Y$ . Um elemento em  $Y$  ( $y$ ) é uma imagem dos elementos no produto cartesiano ( $y = f(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_r)$ ). O Princípio da Extensão permite obter uma imagem  $B$  em  $Y$  a partir de  $r$  conjuntos em  $X_1 \times \dots \times X_r$ . O elemento no universo  $Y$  é resultado do mapeamento  $f$  sobre os elementos em  $X_1 \times \dots \times X_r$  e a função de pertinência do elemento no universo  $B$  é o mínimo das funções de pertinência dos elementos em  $X_1 \times \dots \times X_r$ .

FIGURA 6-4 : Ilustração do Princípio da Extensão.

#### Exemplo 6-13 - [ZIM85]

Seja  $A$  um conjunto difuso definido em  $X$  por :

$$A = \{ (-1, 0.5); (0, 0.8); (1, 1.0); (2, 0.4) \}$$

Segundo o Princípio da Extensão, a função  $y = f(x) = x^2$  define um conjunto difuso  $B$  no universo  $Y$ , dado por :

$$B = \{ (0, 0.8); (1, 1.0); (4, 0.4) \}$$

Este conjunto difuso está representado na figura 6-5.

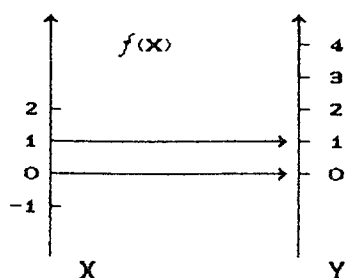


FIGURA 6-5 : Representação Esquemática do Princípio da Extensão.

**Exemplo 6-14 - [ZAD83a]**

Dados o universo  $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ , a função  $f$  sendo a função quadrado e o conjunto difuso em  $U$ , chamado "pequeno" e definido por :

$$\text{PEQUENO} = 1/1 + 1/2 + 0.8/3 + 0.6/4 + 0.4/5$$

considerando-se que  $f(F)$  para  $F$  difuso é dada por

$$f(F) = \sum_{u_i} \mu_{F_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{F_N}(u_N) / f(u_1, \dots, u_N)$$

tem-se por 6.2.2.g que o quadrado de PEQUENO é :

$$\text{PEQUENO}^2 \triangleq 1/1 + 1/2 + 0.64/3 + 0.36/4 + 0.16/5$$

**Exemplo 6-15 - [KAN86]**

Dados os universos  $X_1 = X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , os conjuntos difusos :

$$A_1 = \text{"aproximadamente 2"} = 0.6/1 + 1/2 + 0.8/3$$

$$A_2 = \text{"aproximadamente 4"} = 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5$$

dada a operação binária  $\bullet$ , definida em  $X_1 \times X_2$  com valores em  $Y$ , e dado que  $A_1$  e  $A_2$  são conjuntos difusos em  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente, tal que :

$$A_1 = \mu_{A_{11}}(x_{11})/x_{11} + \dots + \mu_{A_{1n}}(x_{1n})/x_{1n}$$

e

$$A_2 = \mu_{A_{21}}(x_{21})/x_{21} + \dots + \mu_{A_{2n}}(x_{2n})/x_{2n}$$

a operação  $\bullet$  pode ser estendida para os subconjuntos difusos de  $X_1$  e  $X_2$ , definindo-se :

$$\begin{aligned} A_1 \bullet A_2 &= \left[ \sum_i \mu_{A_{1i}}(x_{1i})/x_{1i} \right] \bullet \left[ \sum_j \mu_{A_{2j}}(x_{2j})/x_{2j} \right] \\ (6-93) \quad &= \sum_{i,j} \min(\mu_{A_{1i}}(x_{1i}), \mu_{A_{2j}}(x_{2j})) / (x_{1i} \bullet x_{2j}) \end{aligned}$$

Para os conjuntos  $A_1$  e  $A_2$ , considerando-se a operação  $\bullet$  como o produto, tem-se :

$$\begin{aligned}
 A_1 \cdot A_2 &= ("aproximadamente 2" \times "aproximadamente 4") \\
 &= (0.6/1 + 1/2 + 0.8/3) \times 0.8/3 + 1/4 + 0.7/5 \\
 &= 0.6/3 + 0.6/4 + 0.6/5 + 0.8/6 + 1/8 + 0.7/9 + 0.7/10 + 0.7/12 + 0.7/15
 \end{aligned}$$

### 6.2.3.c. Operações Algébricas Extendidas em Conjuntos Difusos

Dentre os campos de aplicação do Princípio da Extensão, encontram-se as Operações Algébricas. Dubois e Prade [DUB80] generalizam esta aplicação como : "dados uma lei de composição  $n$ -ária de  $X^n$  para  $X$ , é possível induzir uma lei de composição  $n$ -ária em  $\mathcal{F}(X)$  (conjunto de conjuntos difusos em  $X$ )". Neste trabalho, restringe-se às operações ao caso em que  $X = \mathbb{R}$ , a linha real, analogamente ao que fazem Dubois e Prade.

#### 6.2.3.c1. Operações em Números Difusos - Operação Binária [DUB80]

Uma operação binária  $\bullet$  em  $\mathbb{R}$  é dita crescente se e somente se:

$$x_1 > y_1 \text{ e } x_2 > y_2 \text{ então } (x_1 \bullet x_2) > (y_1 \bullet y_2)$$

Analogamente,  $\bullet$  é dita decrescente se e somente se:

$$x_1 > y_1 \text{ e } x_2 > y_2 \text{ então } (x_1 \bullet x_2) < (y_1 \bullet y_2)$$

#### Exemplos 6-16, 6-17 e 6-18

$f(x,y) = x + y$	operação binária crescente
$f(x,y) = x \cdot y$	operação binária crescente para $x,y > 0$
$f(x,y) = -(x + y)$	operação binária decrescente

#### Notação

Operações binárias  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  e  $\div$ , quando extendidas para números difusos (conjuntos difusos convexos normalizados em  $\mathbb{R}$ ) são representadas respectivamente por :  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\otimes$  e  $\oslash$ , ou, genericamente:

$$\bullet \longrightarrow (\bullet)$$

#### 6.2.3.c2. Teoremas Básicos e Propriedades

**Teorema I :** Se  $M$  e  $N$  são números difusos contínuos cujas funções de pertinência são funções injetoras contínuas em  $\mathbb{R}$  e  $\bullet$  é uma operação binária contínua crescente, então  $M (\bullet) N$  é um número difuso contínuo com função de pertinência  $\mu_{M(\bullet)N}$  injetora e contínua em  $\mathbb{R}$ .



**Teorema II :** A extensão para números difusos contínuos  $M$  e  $N$  pressupõe  $\mu_M$  e  $\mu_N$  contínuas em  $\mathbb{R}$ , implicando em

$$\mu_{M(\bullet)N} = \sup_{z = x \bullet y} \min(\mu_M(x), \mu_N(y))$$

Propriedades de  $(\bullet)$

1. Se  $\bullet$  é comutativa,  $(\bullet)$  também é.
2. Se  $\bullet$  é associativa,  $(\bullet)$  também é.

### 6.2.3.ca. Adição Extendida - $\oplus$

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos difusos com funções de pertinência  $\mu_A(x)$  e  $\mu_B(x)$  respectivamente de acordo com o Princípio da Extensão, a Adição Extendida de  $A$  e  $B$  é definida por:

$$S = A \oplus B = \{ (z, \mu_S(z)) / z \in Z \}$$

$$(6-34) \quad \mu_S = \begin{cases} \sup_{z = x + y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{para } x \in X \text{ e } y \in Y \\ 0 & \text{para } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

### Exemplo 6-19

Dados os conjuntos difusos  $A$  e  $B$ , a seguir relacionados,

$$\begin{aligned} A &= \{ (3;0.2), (4;0.6), (5;1.0), (6;0.7), (7;0.1) \} \\ B &= \{ (8;0.3), (9;0.7), (10;1.0), (11;0.7), (12;0.3) \} \end{aligned}$$

a aplicação da adição extendida  $A \oplus B$  fornecerá o seguinte conjunto difuso  $S$  :

$$S = \{ (11;0.2), (12;0.3), (13;0.6), (14;0.7), (15;1.0), (16;0.7), (17;0.7), (18;0.3), (19;0.1) \}$$

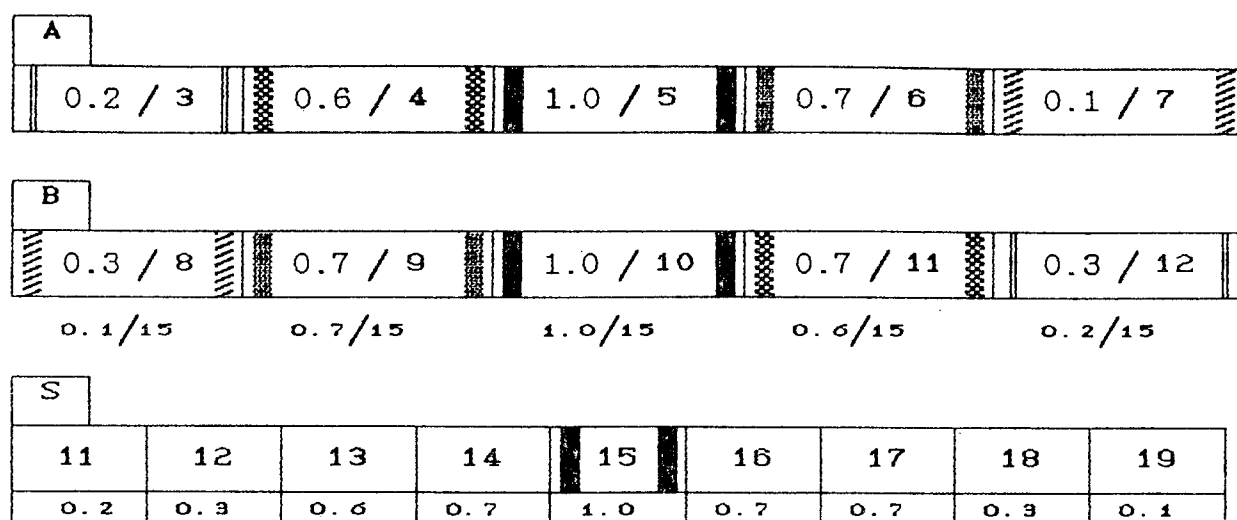


FIGURA 6-6 : Representação Esquemática da Adição Extendida.

A figura ilustra o cálculo de  $\mu_S(15)$ , segundo a definição anterior. Conclui-se que o grau obtido é oriundo do par  $x = 5$  e  $y = 10$ , já que este tem o supremo  $\mu_S$  dentre todos os pares  $(x, y)$  tais que  $x + y = 15$ .

O exemplo acima pode ser aplicado a todas operações extendidas (e.g.  $\oplus$ ,  $\ominus$ ,  $\otimes$  ou  $\oslash$ ). A diferença encontra-se apenas na modificação da operação que agrega os elementos de A com os de B, caracterizada pela operação clássica correspondente à da operação extendida (e.g.  $+$ ,  $-$ ,  $*$  ou  $\div$ ).

#### Propriedades da Adição Extendida

1.  $M \oplus (-M) \neq 0$
2.  $M \oplus 0 = M$
3.  $\oplus$  é Comutativa
4.  $\oplus$  é Associativa

#### 6.2.3.c4. Produto Extendido - $\otimes$

Define-se o *Produto Extendido* de dois conjuntos difusos A e B pela seguinte expressão :

$$P = A \otimes B = \{ (z, \mu_P(z)) / z \in Z \}$$

onde

$$(6-35) \quad \mu_P = \begin{cases} \sup_{z = x * y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{para } x \in X \text{ e } y \in Y \\ 0 & \text{para } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

#### Propriedades da Multiplicação Extendida

1.  $\otimes$  é Comutativa
2.  $\otimes$  é Associativa
3.  $M \otimes 1 = M$
4.  $M \otimes M^{-1} \neq 1 \rightarrow$  O Elemento Inverso inexiste para  $\otimes$

6.2.3.c5. Subtração Extendida -  $\ominus$ 

Define-se a *Subtração Extendida* entre dois números difusos por :

$$M = A \ominus B = \{ (z, \mu_M(z)) / z \in Z \}$$

onde

$$(6-36) \quad \mu_M = \begin{cases} \sup_{z = x - y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{para } x \in X \text{ e } y \in Y \\ 0 & \text{para } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

*Observação:* A subtração não é uma operação crescente ou decrescente, descartando, assim, a possibilidade de se aplicar o Teorema I. Contudo, se A e B são números difusos,  $A \ominus B$  também é, já que  $A \ominus B = A \oplus (-B)$ .

6.2.3.c6. Divisão Extendida -  $\odot$ 

Define-se a *Divisão Extendida* entre dois conjuntos difusos A e B por :

$$D = A \odot B = \{ (z, \mu_D(z)) / z \in Z \}$$

onde

$$(6-37) \quad \mu_D = \begin{cases} \sup_{z = x : y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) & \text{para } x \in X \text{ e } y \in Y \\ 0 & \text{para } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

## 6.2.3.c7. Máximo entre Números Difusos (Max\_nd)

O *Máximo Extendido* entre números difusos fornece um terceiro número difuso, sendo que sua expressão é originada diretamente do Teorema I de 6.2.3.c2. O Máximo é uma operação dual à união, obtido considerando-se o máximo não difuso dos valores de pertinência [DUB80]. Explicitamente :

$$(6-38) \quad D = \text{Max\_nd}(A, B) = \{ (z, \mu_D(z)) / z \in Z \}$$

onde :

$$\mu_D = \sup_{z = \max(x, y)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \text{ para } x \in X \text{ e } y \in Y$$

## 6.2.3.c8. Mínimo entre Números Difusos (Min\_nd)

O *mínimo* entre números difusos também fornece um número difuso, com a diferença que a dualidade neste caso é com a intersecção, o que fornece a seguinte expressão para o mínimo entre números difusos :

$$(6-39) \quad D = \text{Min\_nd} (A, B) = \{ (z, \mu_D(z)) / z \in Z \}$$

onde :

$$\mu_D = \sup_{z = \min(x, y)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \text{ para } x \in X \text{ e } y \in Y$$

#### 6.2.4. Relações Difusas

As relações difusas são uma extensão das relações clássicas para a Teoria dos Conjuntos Difusos. Alguns exemplos de relações difusas são "muito mais próximo que", "parecido com", "muito maior que", etc.

Em Sistemas Especialistas, as relações difusas são importantes quando o "modus ponens generalizado"<sup>25</sup> é modelado via relação difusa. Trata-se do caso em que o cobrimento entre uma regra e uma fato com termos difusos é modelado por operações sobre conjuntos difusos segundo relações difusas entre os mesmos. Por ora, as relações de interesse no presente trabalho são aquelas propostas por Mizumoto, Fukami e Tanaka [MIZ79], a seguir relacionadas.

$$(6-40) \quad R_S = F_1 \times V \rightarrow S \cup X F_2$$

$$(6-41) \quad R_\sigma = F_1 \times V \rightarrow \sigma \cup X F_2$$

$$(6-42) \quad R_{S\sigma} = (F_1 \times V \rightarrow S \cup X F_2) \wedge (-F_1 \times V \rightarrow \sigma \cup X -F_2)$$

onde :

$$\mu_{F_1}(u) \rightarrow S \mu_{F_2}(v) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \mu_{F_1}(u) \leq \mu_{F_2}(v) \\ 0 & \text{SE } \mu_{F_1}(u) > \mu_{F_2}(v) \end{cases}$$

$$\mu_{F_1}(u) \rightarrow \sigma \mu_{F_2}(v) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \mu_{F_1}(u) \leq \mu_{F_2}(v) \\ \mu_{F_2}(v) & \text{SE } \mu_{F_1}(u) > \mu_{F_2}(v) \end{cases}$$

onde :

U e V : são universos do discurso de F<sub>1</sub> e F<sub>2</sub> respectivamente

u e v : são elementos de um conjunto difuso

∧ : simboliza a intersecção entre duas relações difusas

-F<sub>i</sub> : simboliza o complemento do conjunto difuso F<sub>i</sub>

μ : é a função de pertinência

X : é o produto cartesiano de dois conjuntos difusos

<sup>25</sup> Modus Ponens é o mecanismo de inferência do Raciocínio Dedutivo e foi abordado no item 2.2.1.a3. O Modus Ponens Generalizado caracteriza-se pela difusão nas premissas.

## 6.2.4.a. Composição entre uma Relação Difusa e um Conjunto Difuso

Outro elemento importante no processo de inferência em sistemas especialistas difusos é a *Composição Difusa* (ou Composição Max-Min). Dados  $F$  um conjunto difuso e  $R$  uma relação difusa, a composição (representada por  $\circ$ ) entre ambos gera o conjunto difuso  $C$ , cuja função de pertinência é dada por :

(6-43)

$$C = F \circ R,$$

$$\text{com } \mu_C(x) = \max_w [\min(\mu_F(w), \mu_R(w, x))]$$

onde  $\mu_C(x)$  é uma função de pertinência e  $w$  e  $x$  são os elementos do universo do discurso [MIZ79].

## 6.2.5. A Teoria Possibilística

A caracterização da imprecisão em sistemas especialistas como essencialmente *possibilística* tem sido uma das principais postulações dos pesquisadores da Teoria dos Conjuntos Difusos. Assim, determinadas abordagens ao tratamento de imprecisão em sistemas especialistas passam necessariamente pela compreensão da *Teoria Possibilística*.

Segundo Zimmerman [ZIM85], a Teoria Possibilística focaliza principalmente a imprecisão que está intrínseca na linguagem natural e que se assume ser possibilística, ao invés de probabilística. Isto torna o conceito de "variável" aplicável mais no sentido lingüístico do que estritamente matemático.

A linguagem natural, em forte contraste com a linguagem formal é incapaz de caracterizações precisas [ZAD81]. Zadeh [ZAD81] evidencia 3 razões principais para esta incapacidade :

## a) A Ambigüidade da Linguagem

"...a pressão para a brevidade do discurso tende a tornar a linguagem natural maximamente ambígua, no sentido de que o nível de ambigüidade na comunicação humana está geralmente próximo do limite do que é esclarecido pelo uso de um corpo externo de conhecimento, compartilhado pelas partes no discurso."

### b) A Gramaticidade Parcial da Linguagem Natural

"...uma fração significativa de sentenças em linguagem natural não pode ser caracterizada como estritamente gramatical ou não gramatical. (...). Assim, uma gramática realista para a linguagem natural deveria associar a cada sentença seu grau de gramaticidade - ao invés de gerar meramente as sentenças que são completamente gramaticais. A questão da gramaticidade parcial tem o efeito de complicar enormemente o problema da tradução automática da linguagem natural em uma linguagem de representação de significado."

### c) A Palavra como uma Síntese de um Conceito Generalizado

"... uma palavra em linguagem natural é geralmente um resumo de um conceito complexo, de múltiplas faces e incapaz de uma caracterização precisa. Por esta razão, a denotação de uma palavra geralmente é um subconjunto difuso do universo do discurso." [ZAD81].

Um dos conceitos centrais na Teoria Possibilística é o de *distribuição de possibilidade*. Seguindo a estrutura em [ZIM85], antes de se analisar a distribuição de possibilidade, introduz-se a noção de *restrição difusa*.

Zimmerman [ZIM85] propõe uma analogia para que se entenda melhor o que uma restrição difusa representa. A analogia é visualizar a restrição difusa como sendo o volume de uma mala elástica ( $F$ ). Para uma mala de couro rígido, o volume é um número fixo. Para uma valise flexível, o volume depende de um certo grau de comprimento que é usado para esticá-la. A variável, neste caso, poderia ser o volume da valise ( $X$ ), com seus valores podendo ser  $u \in U$  e o grau para o qual a variável assume diferentes valores de  $u$  é expresso por  $\mu_F(u)$ .

A seguir apresenta-se o conceito matemático de restrição difusa.

#### 6.2.5.a. Restrição Difusa - [ZIM85]

Dado  $F$  o conjunto difuso no universo  $U$ , caracterizado pela função de pertinência  $\mu_F(u)$ ,  $F$  é uma *Restrição Difusa* na variável  $X$  se  $F$  atua como uma restrição elástica aos valores que podem ser associados a  $X$ , no sentido de que a associação de valores  $u$  a  $X$  tem a forma :

$$x = u : \mu_F(u)$$

onde  $\mu_F(u)$  é o grau para o qual a restrição representada por  $F$  está satisfeita quando  $u$  é associado a  $x$ . Equivalentemente, isto implica que  $1 - \mu_F(u)$  é o grau para o qual a restrição deve ser "esticada", a fim de permitir a associação de valores  $u$  à variável  $x$ .

#### Exemplo 6-20

Considere a proposição  $p$  "John é jovem", na qual *jovem* é um conjunto difuso do universo  $U = [0,100]$ , caracterizado pela função de pertinência  $\mu_{\text{JOVEM}}(u) = S(\mu, 20, 30, 40)$ , onde  $u$  é a idade numérica e a função  $S$  tem determinada forma<sup>26</sup> para a obtenção de  $\mu$ .

Zadeh [ZAD78] relaciona o conceito de uma restrição difusa com o de uma distribuição de possibilidade como segue :

*"Considere uma idade numérica, por exemplo  $u = 28$ , cujo grau de pertinência ao conjunto difuso "jovem" é aproximadamente 0.7. Primeiro interpretamos 0.7 como o grau de compatibilidade de 28 com o conceito classificado "jovem". Então, postula-se que a proposição "John é jovem" converte o significado de 0.7 de grau de compatibilidade de 28 com "jovem" para o grau de possibilidade de que John tenha 28, dada a proposição "John é jovem". Em resumo, a compatibilidade de um valor  $u$  com jovem vem convertida na possibilidade do valor  $u$  dado que "John é jovem".*

#### Exemplo 6-21

Para ilustrar um pouco mais, considera-se o exemplo proposto por Zadeh [ZAD81], no qual  $n = 2$  e há uma proposição "John é um homem grande", no qual **HOMEM GRANDE** é uma relação difusa definida na tabela 6-1.

A relação pode também ser expressa na forma linear [ZAD81] :

$$\text{HOMEM GRANDE} = 0.5/(165,60) + 0.6/(170,60) + \dots + 1/(180,80)$$

na qual um termo como  $0.6/(170,60)$  significa que o grau de pertinência do par  $(170,60)$  na relação **HOMEM GRANDE** (ou, equivalentemente, sua compatibilidade como a relação **HOMEM GRANDE**) é 0.6.

<sup>26</sup> Uma das especificações possíveis para a função  $S$  pode ser encontrada em [ZIM85] ou [ZAD78] e uma destas possíveis representações está na figura 6-7.

HOMEM GRANDE	Altura	Peso	$\mu$
	165	60	0.50
	170	60	0.60
	175	60	0.70
	170	65	0.75
	—	—	—
	180	70	0.90
	175	75	0.90
	180	75	0.95
	180	80	1.00
	185	75	1.00

TABELA 6-1 : Relação Difusa HOMEM GRANDE. Altura em cm e Peso em Kg.

#### 6.2.5.b. Distribuição de Possibilidade

Inicialmente considera-se um conjunto não-difuso  $A$  do universo  $U$  e uma variável  $X$  que toma valores em  $U$ . Afirmar que  $X$  toma seus valores em  $A$  indica que qualquer elemento em  $A$  pode possivelmente ser um valor de  $X$  e que qualquer elemento que não esteja em  $A$  não pode ser um valor para  $X$ . A proposição " $X$  toma seus valores em  $A$ " (ou  $X \in A$ ) pode ser vista como induzindo uma *distribuição de possibilidade*  $\Pi$  sobre  $U$  associando com cada elemento  $u$  a possibilidade de que  $u$  seja um valor de  $X$ . A forma desta distribuição de possibilidade é apresentada a seguir.

$$(6-44) \quad \Pi(X = u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in A \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Agora considera-se  $A$  como um conjunto difuso que atua como uma restrição difusa nos possíveis valores de  $X$ . Uma extensão à interpretação anterior é que  $A$  induz uma *distribuição de possibilidade* que é igual a  $\mu_A$  nos valores de  $X$ , dada por :

$$(6-45) \quad \Pi(X = u) = \pi(u) = \mu_A(u)$$

Para uma melhor visualização dos conceitos anteriores, propõe-se a seguir um exemplo a cada situação, ou seja, para o caso em que  $A$  é um conjunto difuso e para o caso em que é clássico.

#### Exemplo 6-22

Para o caso não-difuso, considera-se o conjunto universo  $U$  formado pelas letras  $u$  do alfabeto. O conjunto  $A$  é definido por:



$$A = \{ \text{conjunto das letras vogais} \}$$

Sendo  $x$  uma letra que toma seus valores em  $A$ , a função de distribuição de possibilidade de que cada letra  $u$  do alfabeto seja um valor para  $x$  é dada por :

$$\Pi(x = u) = \pi(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ é vogal} \\ 0 & \text{se } u \text{ é consoante} \end{cases}$$

#### Exemplo 6-23

Para o caso de  $A$  difuso, toma-se como exemplo o conjunto universo  $U$  dado pelas notas em uma prova ( $U = [0, \dots, 10]$ ). O conjunto difuso  $A$  é caracterizado como "conjunto de boas notas", ou explicitamente :

$$A = \{(4, 0.2); (5, 0.5); (6, 0.7); (7, 0.9); (8, 1.0); (9, 1.0); (10, 1.0)\}$$

A proposição " $x$  é uma boa nota" associa a  $x$  a distribuição de possibilidade :

$$\Pi_x = A$$

na qual um termo como  $(7, 0.9)$  significa que a possibilidade de que seja 7, dado que  $x$  é uma boa nota, é 0.9.

#### Exemplo 6-24

Retomando-se o exemplo de Zadeh [ZAD78] elucidado anteriormente, tem-se que o conjunto difuso  $A$  é representado pelo conjunto difuso "JOVEM", a variável  $u$  deste conjunto é dada pelas "idades jovens", definida no intervalo  $U = [0, 100]$ . Tomando seus valores no mesmo intervalo, tem-se a variável  $x$  do exemplo, "IDADE DE JOHN".

A proposição "John é jovem" pode ser lida como "A idade de John é jovem" e torna o conjunto difuso "JOVEM" uma restrição difusa, associando uma distribuição de possibilidade  $\Pi_x$  para  $x$  ser igual a esta restrição, ou :

$$\Pi_{\text{IDADE DE JOHN}}^{(28)} = \mu_{\text{JOVEM}}^{(28)} = 0.7$$

significando que a possibilidade de que a idade de John seja 28 anos é igual ao grau de compatibilidade de que 28 anos seja uma "idade jovem".

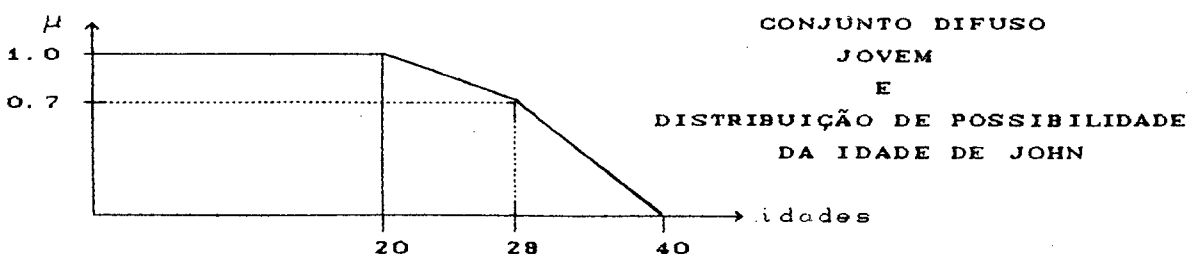


FIGURA 6-7 : Relação Entre Conjunto Difuso e Possibilidade.

**Exemplo 6-25**

Considere-se novamente o exemplo 6-21 elaborado por Zadeh [ZAD81]. Neste caso, o postulado da possibilidade implica que a proposição "John é um homem grande" induz uma distribuição de possibilidade binária  $\Pi(\text{peso}(\text{John}), \text{Altura}(\text{John}))$  cujo *tableau* é idêntico ao da tabela 6-1, com a alteração da última coluna de  $\mu$  para  $\pi$ , significando que os valores de compatibilidade na referida coluna assumem o caráter de valores de possibilidade. Zadeh ilustra o significado disto afirmando que, ao induzir a distribuição de possibilidade  $\Pi(\text{peso}(\text{John}), \text{Altura}(\text{John}))$ , a proposição "John é um homem grande" implica que a possibilidade de que a altura e o peso de John sejam, por exemplo, 170cm e 60Kg respectivamente, é 0.6.

Uma vez que a expressão de distribuição de possibilidade pode ser vista como um conjunto difuso, pode também ser manipulada pela combinação de regras de conjuntos difusos e, mais especificamente, restrições difusas.

A distribuição de possibilidade é um dos tópicos mais polêmicos na Teoria dos Conjuntos Difusos. Muitos são os autores que afirmam que a distribuição de possibilidade é apenas um caso particular da probabilidade e que não é necessário utilizar outras teorias para modelar situações onde conceitos difusos estão presentes ([NAT83], [STA77], [CHE86], etc).

Na realidade, esta discussão existe desde o início da criação da Teoria dos Conjuntos Difusos. Várias são as publicações em que seus pesquisadores procuram apresentar exemplos ilustrativos à diferença entre possibilidade e probabilidade (e.g. [ZAD78], [ZAD86], [KAN86], [ZIM85], [DUB80], etc).

Analogamente à Teoria da Probabilidade e ao conceito de função de probabilidade, a Teoria dos Conjuntos Difusos apresenta outros conceitos relacionados à função de possibilidade. Tais conceitos são relevantes no estudo do tratamento de imprecisão em sistemas especialistas e são abordados a seguir.

**6.2.5.c. Medida de Possibilidade**

Um dos tópicos de estudo na Teoria dos Conjuntos Difusos relaciona-se a medidas de conjuntos. Neste, o que se considera, ao invés do grau de pertinência, é o grau de crença, possibilidade ou

probabilidade de que um elemento não-classificado pertença ao conjunto (difuso ou não).

As medidas difusas providenciam uma correlação entre alguns tipos de medidas de incerteza. No início dos anos 70, Sugeno [SUG77] definiu um conceito geral de medida difusa pela relaxação da propriedade aditiva na definição clássica. Mais tarde, Dubois e Prade [DUB80] demonstraram que as funções de crença de Shafer e as medidas de possibilidade e probabilidade são casos particulares da medida de Sugeno.

Especificamente no caso da medida difusa de possibilidade, são encontradas as seguintes definições :

#### 6.2.5.c1. Possibilidade Difusa [ZAD78]

Uma *Possibilidade Difusa* é uma função  $\Pi : Pos(u) \rightarrow [0,1]$  com as seguintes propriedades :

- i)  $\Pi(\emptyset) = 0 ; \Pi(U) = 1$
- ii)  $A \subseteq B \rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$
- iii)  $\Pi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$

onde  $U$  é o conjunto universo,  $A$ ,  $B$  e  $A_i$  são conjuntos clássicos.

A medida de possibilidade pode ser construída a partir da distribuição de possibilidade, ou seja, uma função  $\pi$  de  $U$  para  $[0,1]$  tal que  $\sup_{u \in U} \pi(u) = 1$  (condição de normalização). Mais especificamente ([DUB80]) :

$$(6-40) \quad \forall A, \Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi(u)$$

Segundo Zimmerman [ZIM85], a Teoria Possibilística corresponde essencialmente a uma versão min-max da Teoria dos Conjuntos Difusos. Uma possibilidade não é sempre uma medida difusa, mas sempre o será quando  $U$  for finito e a distribuição de possibilidade for normalizada, isto é, há um mapeamento para  $[0,1]$ .

## 6.2.5.cz. Possibilidade Difusa para Conjunto Difuso

A generalização para o caso em que  $A$  é um conjunto difuso apresenta a seguinte definição para possibilidade difusa, dada por Zadeh em [ZAD78]:

Dado um conjunto difuso  $A$  no universo  $U$  e  $\Pi_x$  uma distribuição de possibilidade associada à variável  $X$ , a qual toma seus valores no universo  $U$ , a medida de possibilidade,  $\pi(A)$ , de  $A$  é então definida por:

$$\begin{aligned} \text{Pos} \{ X \in A \} &\stackrel{\Delta}{=} \pi(A) \\ (6-47) \quad &\stackrel{\Delta}{=} \sup_{u \in U} \min \{ \mu_A(u), \Pi_x(u) \} \end{aligned}$$

## Exemplo 6-26 - [ZAD78]

Considere a distribuição de possibilidade que é induzida pela proposição " $X$  é um inteiro pequeno", onde o conjunto difuso  $A$  dos "inteiros pequenos" é tomado no universo  $U$  dos inteiros positivos e definido por :

$$F = \{(1, 1.0); (2, 1.0); (3, 0.8); (4, 0.6); (5, 0.4); (6, 0.2)\}$$

de onde

$$\Pi_x = F$$

considerando-se o conjunto clássico  $A = \{3, 4, 5\}$ , a medida de possibilidade de  $A$ ,  $\Pi(A)$ , é então :

$$\Pi(A) = \max(0.8; 0.6; 0.4) = 0.8$$

Se  $A$  for assumido como conjunto difuso dos "inteiros não-pequenos", definido por :

$$A = \{(3, 0.2); (4, 0.4); (5, 0.6); (6, 0.8); (7, 1), \dots\}$$

então, a medida de possibilidade da proposição  $p$ , " $x$  é um inteiro não-pequeno" é dada por :

$$\begin{aligned} \text{Pos}(p) &= \max\{\min(0.8; 0.2); \min(0.6; 0.4); \min(0.4; 0.6); \min(0.2; 0.8)\} \\ &= \max\{0.2; 0.4; 0.4; 0.2\} \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Uma das preocupações em sistemas especialistas é a tradução de expressões colocadas em linguagem natural. Deve-se traduzi-las em uma coleção de distribuições analíticas de um

conjunto de variáveis. Colocado de outra forma, é desejável que o programa possa atuar como um sistema de pergunta-resposta, mesmo quando a base de conhecimento possua dados imprecisos.

Estas distribuições analíticas que tornam tratáveis as proposições em linguagem natural apresentam diversas formas, de acordo com a técnica de tratamento e sua potencialidade em considerar esta questão. Quando a técnica utilizada for a Teoria da Probabilidade, a distribuição do conjunto de variáveis será probabilística. Na Teoria dos Conjuntos Difusos, a tradução de proposições em linguagem natural se dá através da distribuição de possibilidade. Neste caso, surge o que se denomina *equação de designação possibilística* [ZAD77], [ZAD83].

#### 6.2.5.d. Equação de Designação Possibilística

Dado  $\Pi_X$  a distribuição de possibilidade de  $X$ , isto é, o conjunto difuso de valores possíveis que  $X$  pode tomar no universo  $U$  e dado  $F$  uma restrição difusa, então :

$$(6-48) \quad \Pi_X = F$$

é chamada *Equação de Designação Possibilística (e.d.p.)*

#### Exemplo 6-27 - [ZAD77]

Tomando-se uma proposição simples como "John é jovem", para traduzi-la em uma linguagem de representação, usa-se a seguinte equação de designação possibilística :

$$\Pi_{IDADE}^{(John)} = JOVEM$$

na qual JOVEM é uma conjunto difuso do intervalo  $[0,100]$  e  $\Pi_{IDADE}^{(John)}$  é a distribuição de possibilidade da variável Idade(John).

Na realidade, a e.d.p. torna explícita a associação possibilística apresentada na definição de distribuição de possibilidade.

#### 6.2.5.e. Postulado da Possibilidade

A base para interpretações possibilísticas de

proposições difusas é dada pelo *postulado da possibilidade*, o qual é apresentado a seguir.

O postulado declara que se  $X$  é uma variável que toma valores no universo  $U$  e  $F$  é um conjunto difuso de  $U$ , então a proposição

$$q \triangleq X \text{ é } F \quad (p_1)$$

induz uma distribuição de possibilidade  $\Pi_x$  que é igual a  $F$ , ou

$$\Pi_x = F \quad (p_2)$$

implicando que

$$(6-49) \quad \text{Pos } \{x = u\} = \mu_F(u), \quad u \in U \quad (p_3)$$

onde  $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$  é a função de pertinência de  $F$  e  $\mu_F(u)$  é o grau de pertinência de  $u$  em  $F$ .

Portanto, como afirma Zadeh [ZAD77], a distribuição de possibilidade de  $x$  é essencialmente um conjunto difuso que serve para definir a possibilidade de que  $x$  possa assumir qualquer valor específico  $u$  em  $U$ . A função  $\Pi_x : U \rightarrow [0,1]$  que é igual a  $\mu_F$  e associa a cada  $u \in U$  a possibilidade de que  $x$  tome  $u$  como seu valor é chamada *função de distribuição de possibilidade* associada a  $x$ . É importante notar que a distribuição de possibilidade em  $p_2$  depende da definição de  $F$  e, portanto, é essencialmente subjetiva.

A equação que define  $p_2$  é denominada *equação de designação possibilística* porque significa que a proposição " $X$  é  $F$ " traduz a distribuição de possibilidade de  $X$  para a designação de um conjunto difuso [ZAD77]. Mais genericamente, a equação de designação possibilística correspondendo a uma proposição da forma " $N$  é  $F$ ", onde  $F$  é um conjunto do universo do discurso  $U$ ,  $N$  é o nome de (a) uma variável, (b) um conjunto difuso, (c) uma proposição ou (d) um objeto, pode ser expressa como :

$$(6-50) \quad \Pi_x(N) = F$$

ou, de forma mais simples :

$$(6-51) \quad \Pi_x = F$$

onde  $X$  é ou a própria  $N$  (quando  $N$  é variável) ou uma variável que está explícita ou implícita em  $N$ , com  $X$  tomando valores em  $U$ .

Por exemplo, no caso da proposição "Nora é jovem",  $N \triangleq$  Nora,  $X = \text{Idade}(\text{Nora})$ ,  $U = [0,100]$  e

$$\text{Nora é Jovem} \longrightarrow \Pi_{\text{IDADE}}(\text{Nora}) = \text{JOVEM}$$

onde o símbolo " $\longrightarrow$ " significa "traduz para"

Para proposições do tipo " $X$  é  $F$ ", ou seja, proposições incondicionais (ou fatos), o tratamento por Lógica Difusa pressupõe apenas a utilização da equação de designação possibilística. Em proposições condicionais, contudo, a Lógica Difusa utiliza o conceito de *possibilidade condicional*, com a respectiva e.d.p.

#### 6.2.5.f. Distribuição de Possibilidade Condicional

Dados  $X$  e  $Y$  duas variáveis nos universos  $U$  e  $V$  respectivamente, a *distribuição de possibilidade condicional* de  $X$  dado  $Y$  é induzida pela proposição  $p$  da forma "Se  $X$  é  $F$  então  $Y$  é  $G$ ", sendo denotada por :

$$\Pi_{(Y/X)}(v/u)$$

a correspondente equação de designação possibilística associada com  $p$  é:

$$(6-52) \quad p \longrightarrow \Pi_{(Y/X)} \text{ é } H$$

onde  $H$  é definido em termos de  $F$  e  $G$ .

A definição da distribuição de possibilidade condicional não é única. A seguir, explicita-se algumas das definições existentes.

#### 6.2.5.f1. Definição de Zadeh - [ZAD83b]

$$(6-53) \quad \mu_H(u,v) = 1 \wedge (1 - \mu_F(u) + \mu_G(v))$$

onde

$u$  e  $v$  são valores genéricos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente

$\mu_H : U \times V \longrightarrow [0,1]$  é a função de pertinência de  $H$

$\mu_F : U \longrightarrow [0,1]$  e  $\mu_G : V \longrightarrow [0,1]$  são as funções de pertinência de F e G e

$\wedge$  é o operador min (mínimo)

Assim, expressa em termos de função de distribuição de possibilidade, tem-se :

$$\begin{aligned} \Pi_{(Y/X)}(v/u) &\triangleq \text{Pos } \{ Y = v / X = u \} \\ (6-54) \quad &= 1 \wedge (1 - \mu_F(u) + \mu_G(v)) \end{aligned}$$

#### 6.2.5.fz. Definição de Dubois e Prade - [DUB80]

Inicialmente, Dubois e Prade introduzem o conceito de *separabilidade*. Define-se  $\pi_x(u)$  e  $\pi_y(v)$  como as projeções de  $\pi_{(x,y)}(u,v)$  em U e V respectivamente, onde  $\pi_{(x,y)}(u,v)$  é a distribuição de possibilidade associada a  $(x,y)$ . Denota-se  $\pi_x(u)$  e  $\pi_y(v)$  por :

$$(6-55) \quad \pi_x(u) = \sup_v \pi_{(x,y)}(u,v)$$

$$(6-56) \quad \pi_y(v) = \sup_u \pi_{(x,y)}(u,v)$$

As duas funções  $\pi_x(u)$  e  $\pi_y(v)$  são denominadas *distribuições de possibilidade* e denotam a projeção de  $\pi_{(x,y)}(u,v)$  em U e V.

A *separabilidade* de  $\pi_{(x,y)}(u,v)$  significa que

$$(6-57) \quad \pi_{(x,y)}(u,v) = \min ( \pi_x(u) ; \pi_y(v) )$$

portanto, quando  $\pi_{(x,y)}(u,v)$  é separável,

$$\begin{aligned} (6-58) \quad \pi_x(u) &= \sup_v \pi_{(x,y)}(u,v) \\ &= \sup [ \min ( \pi_x(u) ; \pi_y(v) ) ] \end{aligned}$$

Além disso, Dubois e Prade [DUB80] afirmam que a seguinte fórmula sempre é verdadeira :

$$(6-59) \quad \pi_x(u) = \sup_v \min ( \pi_{(x,y)}(u,v), \pi_y(v) )$$

Para apresentar a fórmula que define a distribuição de possibilidade condicional, Dubois e Prade [DUB80] retomam o



desenvolvimento de Nguyen, que introduziu a noção de distribuição de possibilidade condicional "normalizada". Esta distribuição é denotada por  $\Pi(u/v)$  e é expressa como :

$$(6-60) \quad \Pi(u/v) = \Pi_{(x,y)}(u,v) \cdot \alpha(\Pi_x(u), \Pi_y(v))$$

onde  $\alpha(.,.)$  é a função de normalização, determinada dos dois requerimentos a seguir :

- i)  $\Pi(u/v) \in [0,1]$
- ii)  $\min(\Pi_x(u), \Pi_y(v)) \cdot \alpha(\Pi_x(u), \Pi_y(v)) = \Pi_x(u)$

o requerimento (ii) significa que quando  $\Pi_{(x,y)}(u,v)$  é separável, a distribuição de possibilidade condicional iguala a projeção  $\Pi_x(u)$ . Esta situação é similar a da probabilidade condicional  $P(E/F)$  que se iguala a  $P(E)$  se  $E$  e  $F$  são independentes ( $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ ).

Portanto, a noção da não-interatividade para possibilidades leva à mesma regra como independência para probabilidades.

Os requerimentos (i) e (ii) anteriores levam à seguinte expressão para distribuição de possibilidade condicional :

$$(6-61) \quad \Pi(u/v) = \begin{cases} \pi_{(x,y)}(u,v) & \text{se } \pi_x(u) \leq \pi_y(v) \\ \pi_{(x,y)}(u,v) \frac{\pi_x(u)}{\pi_y(v)} & \text{se } \pi_x(u) > \pi_y(v) \end{cases}$$

### 6.3. RACIOCÍNIO APROXIMADO

Como visto anteriormente, os pesquisadores em Lógica Difusa argumentam que esta técnica pode eximir muitas das deficiências presentes na primeira geração de sistemas especialistas. As deficiências apontadas concentram-se na formalização e inferência ao conhecimento humano que se verifica nestes sistemas. Questiona-se a validade das conclusões neles obtidas através da análise das simplificações que as metodologias tradicionais adotam.

Como um direcionamento a esta questão, sugere-se o *Raciocínio Aproximado*. O termo é oriundo da suposição realista de que o processo de inferência do ser humano que se baseia no raciocínio, na verdade, é baseado em raciocínio aproximado [NEG85]. Esta característica imprecisa no conhecimento humano constituiu-se na principal preocupação quando da criação da Teoria dos Conjuntos Difusa, por Zadeh. O Raciocínio Aproximado, portanto, encontra-se dentre a coleção de técnicas que procedem a inferência sob incerteza, nas quais a Lógica que as fundamenta é *aproximada* ou *probabilística*<sup>27</sup>, ao invés de *exata* ou *determinística*.

Em Raciocínio Aproximado, contempla-se tanto a representação da linguagem natural em proposições computacionalmente compreensíveis como a metodologia para fazer as inferências nesta informação. Contudo, em princípio, pode-se separar a representação do procedimento de inferência [NEG85].

Nos estudos que fundamentam o presente trabalho verificou-se um amplo escopo de pesquisas em técnicas de Raciocínio Aproximado. Ao contrário das metodologias tradicionais, não se tem ainda um desenvolvimento suficiente em Raciocínio Aproximado que caracterize a predominância de qualquer uma destas técnicas. Verifica-se que alguns estudos, embora possuam explicitamente os conceitos subjetivos englobados, têm difícil implementação computacional, enquanto o contrário ocorre para outras técnicas.

Neste trabalho, restringe-se a algumas das abordagens apresentadas na Literatura. Destacam-se os trabalhos pioneiros de Zadeh e os principais ramos de pesquisa que deles se originaram.

---

<sup>27</sup> Não se deve estranhar a inclusão da Lógica Probabilística, uma vez que esta é supostamente englobada pela Lógica Difusa, embora tal afirmação cause veementes protestos junto a pesquisadores da Teoria Probabilística.

Inicialmente, contudo, serão apresentados os principais conceitos e regras presentes nas técnicas estudadas, além daqueles que fundamentam a Teoria dos Conjuntos Difusos, já colocados anteriormente.

### 6.3.1. Princípio da Conjunção [DUB80]

Suponha-se duas proposições  $p$  e  $q$  nas seguintes formas :

a)  $p \triangleq YX = F$ , onde

$$YX = (Y_1, \dots, Y_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$$

$F$  é uma restrição difusa a  $YX$ .

a)  $q \triangleq YZ = G$ , onde

$$YZ = (Y_1, \dots, Y_k, Z_{k+1}, \dots, Z_n)$$

$G$  é uma restrição difusa a  $YZ$ .

As proposições  $p$  e  $q$  são traduzidas, respectivamente, nas seguintes distribuições de possibilidade :

$$\Pi(Y_1, \dots, Y_k, X_{k+1}, \dots, X_n) \text{ e} \\ \Pi(Y_1, \dots, Y_k, Z_{k+1}, \dots, Z_n).$$

segundo o *Princípio da Conjunção*, de  $p$  e  $q$  pode-se inferir  $r$ , traduzida por :

$$\Pi(Y_1, \dots, Y_k, X_{k+1}, \dots, X_n, \dots, Y_1, \dots, Y_k, Z_{k+1}, \dots, Z_n) = c(F) \cap c(G),$$

Expressão (G-62)

caracterizando a *junção* de  $F$  e  $G$ , onde  $c(F)$  e  $c(G)$  são as *extensões cilíndricas* ([DUB80]) de  $F$  e  $G$  respectivamente.

### 6.3.2. Princípio da Projeção e Distribuição Marginal de Possibilidade [ZAD81]

Para a elaboração dos tópicos nesta seção, considera-se distribuições  $n$ -árias, denotadas por  $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ , onde  $x_1, \dots, x_n$  são variáveis ou, equivalentemente, *atributos*, tomando valores em seus respectivos universos do discurso  $U_1, \dots, U_n$ <sup>28</sup>.

<sup>28</sup> Zadeh [ZAD81] evidencia o fato de  $x$  tomar valores em  $U$  (i.e. o domínio de  $x$  é  $U$ ) expressando o domínio de  $x$  como  $U(x)$  ou, com o cuidado para não causar confusão, como  $x$ .

## 6.3.2.a. Distribuição Marginal de Possibilidade [ZAD81]

Especificamente, denota-se  $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$  como sendo uma variável difusa associada com a distribuição de possibilidade  $\Pi(x_1, \dots, x_n)$  ou, simplesmente,  $\Pi x$ , entendendo-se que  $\Pi x$  significa uma relação difusa n-ária no produto cartesiano  $U = U_1 \times \dots \times U_n$  dos universos do discurso associados com  $X_1, \dots, X_n$ . Assume-se que  $\Pi x$  é caracterizada por sua função de distribuição de possibilidade (ou, equivalentemente, por sua função de pertinência)  $\pi(x_1, \dots, x_n)$ , ou simplesmente  $\pi x$  [ZAD81]. Uma variável na forma

$$(6-63) \quad X(s) \triangleq (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

onde  $s \triangleq (i_1, \dots, i_k)$  é uma subsequência da sequência de índices  $(1, \dots, n)$ , constitui uma subvariável de  $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$ . Por analogia ao conceito de distribuição marginal de probabilidade, a distribuição marginal de possibilidade associada com  $X(s)$  é definida por [ZAD81]:

$$(6-64) \quad \Pi x(s) = \text{Proj } U(s) \Pi(x_1, \dots, x_n),$$

onde  $U(s) \triangleq U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ , e a operação de projeção é definida em termos de funções de distribuições de possibilidade por:

$$(6-65) \quad \pi x(s)(u(s)) = \text{Sup } u(s') \pi x(u_1, \dots, u_n)$$

onde  $u(s) \triangleq (u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$  e  $u(s') \triangleq (u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$ , com  $s'$  denotando a sequência de índices complementar a  $s$  (e.g. se  $n = 5$  e  $s = (2, 3)$ , então  $(s') = (1, 4, 5)$ ). Por exemplo, para  $n = 2$  e  $s = (2)$ , a equação anterior produz:

$$\pi x_2(u_2) = \text{Sup } u_1 \pi(x_1, x_2)(u_1, u_2)$$

como sendo a expressão da distribuição marginal de possibilidade de  $X_2$ .

## 6.3.2.b. Projeção [ZAD81]

Segundo Zadeh [ZAD81], a operação de projeção é realizada mais facilmente quando  $\Pi x$  é expressa na forma linear. Ilustrativamente, Zadeh apresenta um exemplo em que  $U_1 = U_2 = a + b$ , ou, mais convenientemente,  $\{a, b\}$ , e

$$\Pi(x_1, x_2) = 0.8aa + 0.6ab + 0.4ba + 0.2bb$$

onde o termo  $0.6ab$  significa que

$$\text{Poss } \{X_1 = a, X_2 = b\} = 0.6$$

Para obter a projeção de  $\Pi x$  em (por exemplo)  $U_2$ , é suficiente substituir o valor de  $x_1$  em cada termo da expressão que define  $\Pi(x_1, x_2)$  pelo string nulo<sup>2º</sup>  $\vee$ . Assim :

$$\begin{aligned}\text{Proj } U_2 \Pi(x_1, x_2) &= 0.8a + 0.6b + 0.4a + 0.2b \\ &= 0.8a + 0.6b\end{aligned}$$

Para simplificar a notação, Zadeh utiliza o QUADRADO para omitir a palavra Proj e interpreta  $U(s)$  como  $x_{i1} \times \dots \times x_{ik}$ . Tornando a notação da seguinte forma [ZAD81] :

$$\text{Proj } U(s) \Pi(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} U(s) \Pi(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} x_{i1} \times \dots \times x_{ik} \Pi(x_1, \dots, x_n)$$

Expressão (6-66)

A seguir são apresentadas algumas das abordagens à aplicação do Raciocínio Aproximado no Tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas.

#### 6.4. ABORDAGEM DE ZADEH SOBRE A LÓGICA DIFUSA EM SISTEMAS ESPECIALISTAS

Segundo Zadeh, o objetivo principal da Lógica Difusa é "providenciar uma base sistemática para representar e inferir de conhecimento impreciso, ao invés de preciso. Na verdade, em Lógica Difusa, qualquer coisa permite-se ser uma questão de grau - embora não necessariamente" [ZAD83b]. Ainda segundo o autor e demais pesquisadores da Teoria dos Conjuntos Difusos, o poderio principal da Lógica Difusa advém do fato de que as lógicas tradicionais de duplo-valor e multi-valor são casos particulares da Teoria.

##### 6.4.1. As Vantagens da Lógica Difusa

A justificativa da aplicação da Lógica Difusa no tratamento de imprecisão em sistemas especialistas, apresentada por Zadeh [ZAD83b], fundamenta-se em 5 pontos que são abordados pela Teoria. São eles :

<sup>2º</sup> Sendo  $r$  e  $s$  duas variáveis e  $\alpha$  e  $\beta$  suas possibilidades respectivas, então  $\alpha r + \beta r = (\alpha \vee \beta) r$ . [ZAD81].

#### 6.4.1.a. Tratamento de Proposições

Em Lógica de duplo-valor, uma proposição  $p$  ou é falsa ou verdadeira. Em Lógica de múltiplos valores, uma proposição pode ser verdade ou tem um valor-verdade intermediário que pode ser um elemento de um conjunto finito  $\mathbb{U}$  ou infinito de valor-verdade. Na Lógica Difusa, os valores-verdade podem variar sobre subconjuntos difusos de  $\mathbb{U}$ .

#### 6.4.1.b. Tratamento de Predicados

Ao contrário do que ocorre na Lógica de duplo-valor, onde os predicados devem ter tratamento clássico, na Lógica Difusa os predicados podem assumir a forma rígida (e.g. *mortal*, *pai de*, *sempre*, etc) ou, mais genericamente, a forma difusa (e.g. *doente*, *cansado*, *grande*, *alto*, etc).

#### 6.4.1.c. Tratamento dos Quantificadores

A quantificação de expressões em Lógica de duplo-valor e multi-valor permite apenas a aplicação dos termos *todos* e *alguns*. No tratamento por Lógica Difusa, a generalidade é permitida na utilização de expressões como *maioria*, *muitos*, *alguns*, *poucos*, *quase 10*, etc. Assim, os quantificadores expressam de forma imprecisa a cardinalidade de conjuntos clássicos e difusos. Nesta concepção, podem ser manipulados por Lógica Difusa pela caracterização dos mesmos como predicados difusos de segunda ordem.

#### 6.4.1.d. Tratamento dos Modificadores de Predicado

Muito usados em linguagem natural, os modificadores de predicado (como *mais ou menos*, *extremamente*, *pouco*, *muito*, etc) são passíveis de representação em Lógica Difusa. Deste tratamento surgem sistemas que consideram variáveis lingüísticas, ou seja, variáveis cujos valores são palavras ou sentenças em linguagem natural ou sintética.

#### 6.4.1.e. Qualificação de Proposições

Para se classificar uma proposição  $p$  em lógica de duplo-valor, utiliza-se os termos *verdadeiro* ou *falso* (valores-verdade), operadores modais como *possível* ou *necessário* e operadores intencionais como *sabe-se*, *acredita-se*, etc. Em Lógica Difusa, há 3 modos de qualificação :

##### 6.4.1.e1. Qualificação Verdade

$p$  é  $\tau$ , na qual  $\tau$  é um valor-verdade difuso.

##### 6.4.1.e2. Qualificação Probabilística

$p$  é  $\lambda$ , na qual  $\lambda$  é uma probabilidade difusa.

##### 6.4.1.e3. Qualificação Possibilística

$p$  é  $\pi$ , na qual  $\pi$  é um possibilidade difusa, como, por exemplo, *muito provável*, *quase impossível*, etc.

Nestes termos, *saber* e *acreditar* são assumidos como predicados difusos binários.

#### 6.4.2. A Caracterização das Proposições na Base de Conhecimento

A Base de Conhecimento (BC) de um sistema especialista pode ser caracterizada por um conjunto de proposições  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Algumas destas proposições  $p_i$  podem ser difusas. A fim de se desencadear um mecanismo de inferência no conhecimento representado em BC, necessita-se caracterizar os diferentes tipos de proposição nela presentes. Para tal, inicialmente as proposições em linguagem natural devem ser caracterizadas em uma *forma canônica* que evidencia as restrições presentes em cada proposição. Seguindo as caracterizações propostas por Zadeh [ZAD83b], apresenta-se a seguir os diversos tipos de proposições possivelmente presentes em uma BC.

##### 6.4.2.a. Proposição Incondicional Não-qualificada

Forma Canônica :  $X$  é  $F$ , onde  $X$  é uma variável e  $F$  é um predicado difuso (ou seja, um subconjunto do domínio de  $X$ ).

Exemplo : "Carol tem uma filha jovem".

**6.4.2.b. Proposição Incondicional Qualificada**

Forma Canônica 1 :  $X \text{ é } F \text{ é } \lambda$ , onde  $X$  é uma variável,  $F$  um predicado difuso e  $\lambda$  uma probabilidade difusa.

Exemplo 1 : "É muito provável que Carol tenha uma filha jovem" ou, equivalentemente, "Carol ter uma filha jovem é muito provável". Esta segunda forma expressa mais diretamente a proposição "Carol tem uma filha jovem" e o qualificador difuso de probabilidade "muito provável".

Forma Canônica 2 :  $QU's \text{ são } F's$ , onde  $Q$  é um qualificador difuso e  $F$  é um conjunto difuso do universo  $U$ .

Exemplo 2 : "Carol é muito ativa na maior parte do tempo". Neste caso, o qualificador "maior parte do tempo" dota a regra de um quantificador difuso.

**6.4.2.c. Proposição Condicional Não-qualificada**

Forma Canônica : Se  $X \text{ é } F$  então  $Y \text{ é } G$ , onde  $X$  e  $Y$  são variáveis e  $F$  e  $G$  são predicados difusos.

Exemplo : "Se  $X$  é um homem então  $X$  é mortal".

**6.4.2.d. Proposição Condicional Qualificada**

Forma Canônica 1 : Se  $X \text{ é } F$  então  $Y \text{ é } G$ , onde  $X$  e  $Y$  são variáveis,  $F$  e  $G$  predicados difusos e  $\lambda$  é uma probabilidade difusa.

Exemplo 1 : "Se um carro é velho, então é provável que não seja muito confiável" ou, mais explicitamente, "Se  $X$  é um carro velho então ( $X$  não ser muito confiável é provável)".

Forma Canônica 2 :  $QF's \text{ são } G's$ , onde  $Q$  é um qualificador difuso e  $F$  e  $G$  são predicados difusos.

Exemplo 2 : "Se  $X$  é um homem então ( $Y$  ser uma mulher jovem é provável)", onde  $Y$  representa uma garota amiga de  $X$  e "provável" é a qualificação difusa de probabilidade.

Exemplo 3 : "A maioria dos suíços são louros". Esta proposição pode ser expressa na forma equivalente



"Se  $X$  é suíço então ( $X$  ser louro é provável)",  
onde a probabilidade difusa "provável" é igual,  
como um número difuso, ao quantificador difuso  
"maioria".

As proposições em linguagem natural na Base de Conhecimento devem ser traduzidas para a forma canônica para que se proceda a inferência. Este procedimento tem por objetivo explicitar as restrições que são induzidas por cada proposição. Em Lógica Difusa, esta explicitação se dá através dos chamados *Testes Semânticos de Escore*, propostos por Zadeh ([ZAD81], [ZAD83b]).

#### 6.4.3. Teste Semântico de Escore

Zadeh sintetiza os princípios no teste semântico de escore afirmando que uma proposição  $p$ , em linguagem natural, pode ser vista como uma coleção de *variáveis focais*  $X_1, \dots, X_n$  tomando valores nos universos  $U_1, \dots, U_n$ , respectivamente e restritas por um conjunto de restrições difusas  $F_1, \dots, F_m$ . Em geral, tanto as variáveis focais como as restrições difusas estão na forma implícita.

Para melhor detalhar esta "tradução", Zadeh considera duas situações distintas : os procedimentos em proposições incondicionais e em proposições condicionais. A seguir expõe-se o mecanismo de "tradução", onde é revelado o tratamento possibilístico às proposições.

##### 6.4.3.a. Proposições Incondicionais

As proposições incondicionais estão caracterizadas nos itens (a) e (b) da seção anterior. A forma canônica ( $fc()$ ) da qual se procederá o tratamento possibilístico é [ZAD83b] :

$$(6-67) \quad p \longrightarrow fc(p) \stackrel{\Delta}{=} X \text{ é } F$$

onde  $X \stackrel{\Delta}{=} (X_1, \dots, X_n)$  é uma variável de dimensão  $n$  cujos componentes são  $X_1 \dots X_n$ ,  $F$  é uma *relação difusa* em  $U_1 \times \dots \times U_n$  que representa uma restrição elástica (ou difusa) em  $X$ .

Zadeh [ZAD83b] refere-se a uma proposição como sendo um sistema de restrições elásticas. O processo de "tradução" ou

representação de significado consiste em explicitar as restrições implícitas em  $p$  através da colocação de  $p$  numa forma onde a variável  $X$  e a restrição  $F$  induzidas estão explícitas.

A proposição  $p$  anterior pode ser interpretada como a equação de designação possibilística (edp), dada na equação 6-48 :

$$\Pi_X = F$$

onde  $\Pi_X$  é a distribuição de possibilidade de  $X$ , ou seja, o conjunto difuso dos valores possíveis que  $X$  toma em  $U \triangleq U_1 \times \dots \times U_n$ . A edp anterior pode ser colocada mais explicitamente:

$$(6-68) \quad \begin{aligned} \pi_X(u) &\triangleq \text{Poss}\{X = u\} \\ &= \mu_F(u) \end{aligned}$$

onde  $u \triangleq (u_1, \dots, u_n)$  é um ponto genérico em  $U = U_1 \times \dots \times U_n$ ,  $\pi_X : U \rightarrow [0,1]$  é a função de distribuição de possibilidade associada com  $\pi_X$ ,  $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$  é a função de pertinência da relação difusa  $F$  e  $\text{Poss}\{X = u\}$  pode ser lido como "a possibilidade que  $X$  possa tomar  $u$  como seu valor".

Portanto, "a proposição  $p$  pode ser traduzida para sua forma canônica ou, equivalentemente, sua equação de designação possibilística" [ZAD83b] :

$$(6-69) \quad p \rightarrow \Pi_X = F$$

onde  $\Pi_X(x_1, \dots, x_n) = F$  é a distribuição de possibilidade induzida por  $p$ .

#### 6.4.3.b. Proposições Condicionais

O segundo tipo de regras presentes em SE's caracterizam proposições condicionais. Por exemplo, "Se a temperatura está alta, então desligue o motor até esfriá-lo". A forma canônica (fc) deste tipo de proposição  $p$  é:

$$(6-70) \quad fc(p) \triangleq \text{Se } X \text{ é } F \text{ então } Y \text{ é } G$$

onde as variáveis focais  $X$  e  $Y$  tomam valores em  $U$  e  $V$  respectivamente,  $F$  e  $G$  são subconjuntos difusos dos universos  $U$  e  $V$  de " $X$  é  $F$ " e " $Y$  é  $G$ " são formas canônicas dos componentes antecedente e conseqüente (ou premissa e conclusão) de  $p$ , respectivamente. Zadeh [ZAD83b] explicita a forma canônica  $p$  pela seguinte equação de designação possibilística:

(6-71)

$$p \longrightarrow \Pi(y/x) \text{ é } H$$

onde  $\Pi(y/x)$  é a distribuição de possibilidade condicional de  $Y$  dado  $X$  e  $H$  é definido em termos de  $F$  e  $G$ , segundo o que foi exposto anteriormente (item 6.2.5.f).

#### 6.4.3.c. Tradução de Proposições Para a Forma Canônica

Zadeh [ZAD83b] afirma que, em geral, a tradução de  $p$  em sua forma canônica requer a construção de (a) uma base de dados explanatória; (b) um procedimento de testes e escores das restrições induzidas por  $p$ ; e (c) uma função de agregação que combine o teste parcial de escores em um único teste de escore  $\tau$  que represente a compatibilidade de  $p$  com a base de dados explanatória. No caso mais geral, este teste de escores único pode ser um vetor. Para o caso de sistemas especialistas, contudo, Zadeh lembra que as proposições na Base de Conhecimento (BC) são geralmente simples o suficiente para serem traduzidas por inspeção. A seguir, acompanha-se os exemplos ilustrativos elaborados por Zadeh :

(a) *Carol tem cabelos Negros*  $\longrightarrow X$  é  $F$ ,

onde

$$\begin{aligned} X &\triangleq \text{Cor (Cabelo (Carol))}, \\ F &\triangleq \text{NEGROS} \end{aligned}$$

e *NEGROS* é um subconjunto difuso do conjunto de cores do cabelo humano.

(b) *John vive próximo a duas milhas de Henry*  $\longrightarrow X$  é  $F$ ,

onde

$$\begin{aligned} X &\triangleq \text{Distância (Localização (Residência (John)),} \\ &\quad \text{Localização (Residência (Henry))),} \\ F &\triangleq \text{PRÓXIMA A 2} \end{aligned}$$

(c) *Henry é muito mais jovem que George*  $\longrightarrow (X_1, X_2)$  é  $F$ ,

onde

$$\begin{aligned} X_1 &\triangleq \text{Idade (Henry)}, \\ X_2 &\triangleq \text{Idade (George)}, \\ F &\triangleq \text{MUITO MAIS JOVEM QUE} \end{aligned}$$

e a relação difusa *MUITO MAIS JOVEM QUE* é um conjunto difuso do conjunto de  $[0,120] \times [0,120]$ .

(d) *Se Tong é loiro, então não é chinês*  $\rightarrow$  Se  $X$  é  $F$  então  $Y$  é  $G$ ,

onde

$X \stackrel{\Delta}{=} \text{Cor (Cabelo (Tong))},$   
 $Y \stackrel{\Delta}{=} \text{Nacionalidade (Tong)},$   
 $F \stackrel{\Delta}{=} \text{LOIRO}$   
 $G \stackrel{\Delta}{=} \text{NÃO CHINÊS}$

(e) *John tem três filhos*  $\rightarrow X$  é  $F$

onde

$X \stackrel{\Delta}{=} \text{Total (Filhos (John))},$   
 $F \stackrel{\Delta}{=} 3$

e *Total (Filhos (John))* é o total do número de elementos no conjunto *Filhos (John)*.

(f) *John tem três filhos jovens*  $\rightarrow (X_1, X_2)$  é  $F$

onde

$X_1 \stackrel{\Delta}{=} \text{Total (Filhos (John))},$   
 $X_2 \stackrel{\Delta}{=} \text{Idade (Filho Mais velho (John))},$   
 $F \stackrel{\Delta}{=} (F_1, F_2),$   
 $F_1 \stackrel{\Delta}{=} 3$   
 $F_2 \stackrel{\Delta}{=} \text{JOVEM}$

e *JOVEM* é um conjunto difuso do intervalo  $[0,120]$ .

Zadeh mostra em seus exemplos que a aplicação do procedimento de inspeção ou a realização de testes semânticos de scores ([ZAD83a]) permite que uma proposição  $p$  na BC de um sistema especialista possa ser expressa em uma forma canônica que coloca em evidência as variáveis restringidas por  $p$  e as restrições elásticas, ou equivalentemente, difusas às quais elas estão sujeitas.

Interpretar a forma canônica de  $p$  como sendo uma equação de designação possibilística faz com que se possa induzir de  $p$  uma distribuição de possibilidade,  $\Pi^p(x_1, \dots, x_n)$ . Deste modo, cada proposição constituinte da BC é convertida em uma distribuição de possibilidade que restringe as variáveis na BC. Assim, através da conjunção (item 6.3.1), pode-se construir uma distribuição global de possibilidade,  $\Pi(x_1, \dots, x_n)$ , induzida da totalidade de proposições na BC. Este é o ponto de partida da dedução da lógica difusa de Zadeh. [ZAD83b].

## 6.4.4. O Mecanismo de Dedução

Continuando a exposição de Zadeh [ZAD83b], assume-se a BC como sendo uma coleção finita de proposições  $\{p_1, \dots, p_N\}$ . Seguindo a notação do autor, assume-se  $\Pi^{p_j}(x_1, \dots, x_n)$  ou, simplesmente,  $\Pi^j$ , como representando a distribuição de possibilidade induzida por  $p_j$ , sendo  $j = 1, \dots, N$ . Para que não haja perda de generalidade ao assumir-se que todas as proposições tenham o mesmo conjunto de variáveis focais<sup>30</sup>, deve-se tomar o conjunto  $\{X_1, \dots, X_n\}$  como sendo a união das variáveis focais associadas com cada proposição. Assim, assumindo-se a hipótese que as proposições  $p_j$  são não-interativas<sup>31</sup>, a função global de distribuição de possibilidade pode ser expressa como :

$$(6-72) \quad \pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge \pi^N(x_1, \dots, x_n)$$

onde  $\wedge \triangleq$  mínimo e

$$\pi(x_1, \dots, x_n)(u_1, \dots, u_n) \triangleq \text{Poss} \{X_1 = u_1, \dots, X_n = u_n\}, \quad u_i \in U_i, \\ i = 1, \dots, n.$$

Expressão (6-70)

O mais comum no processo de inferência, no entanto, é o interesse em possíveis valores de um subconjunto  $\{X_{i1}, \dots, X_{ik}\}$  das variáveis  $\{X_1, \dots, X_n\}$  na BC. Em termos de distribuições de possibilidade, isto significa procurar estabelecer a distribuição

<sup>30</sup> Por exemplo, nos exemplos (a) a (f) anteriores, há variáveis diferentes nas proposições : Cor (Cabelo()), Localização (Residência()), Total (Filhos()), etc.

<sup>31</sup> Duas variáveis difusas  $X(q) \triangleq (X_{i1}, \dots, X_{ik})$  e  $X(q') \triangleq (X_{i1}, \dots, X_{jm})$  são não-interativas se e somente se a distribuição de possibilidade associada com  $X = (X_1, \dots, X_n)$  é o produto cartesiano das distribuições de possibilidade associadas com  $X(q)$  e  $X(q')$ , isto é :  $\Pi_X = \Pi_{X(q)} \times \Pi_{X(q')}$ . Em particular,  $X_1, \dots, X_n$  são não-interativas se e somente se  $\Pi_X = \Pi_{X_1} \times \Pi_{X_2} \times \dots \times \Pi_{X_n}$ . [ZAD78].

A não-interatividade na Lógica Difusa tem como conceito análogo na Probabilidade a independência randômica entre variáveis.

de possibilidade marginal  $\Pi(x_1, \dots, x_k)$  a partir do conhecimento da distribuição global de possibilidade (item 6.3.2). Como se viu no item 6.3.2, a distribuição de possibilidade desejada é escrita simplesmente por [ZAD81] :

$$x_1 \times \dots \times x_k \Pi(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} \text{Proj em } U_1 \times \dots \times U_k \text{ de } \Pi(x_1, \dots, x_n)$$

Por conveniência, Zadeh [ZAD83b] denota por  $X_{(s)}$  a subvariável de  $X \stackrel{\Delta}{=} (X_1, \dots, X_n)$  que está sob foco de interesse, ou seja :

$$X_{(s)} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$$

onde a sequência de índices  $s \stackrel{\Delta}{=} (i_1, \dots, i_k)$  é uma subsequência de  $(1, \dots, n)$ . Usando-se a mesma notação, qualquer n-upla da forma  $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$  pode ser expressa de forma mais compacta por  $A_{(s)}$ .

Fazendo-se  $\Pi_{X_{(s)}}$  ser a projeção da distribuição global de possibilidade  $\Pi_X$  em  $U_{(s)} \stackrel{\Delta}{=} U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ , tem-se, por definição [ZAD83a] :

$$(6-73) \quad \pi_{X_{(s)}}(u_{(s)}) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{u \in (s')} \pi_X(u)$$

onde  $s' \stackrel{\Delta}{=} (j_1, \dots, j_m)$  é a subsequência de índices que é complementar a  $s$ . Por exemplo, se  $n = 5$  e  $s \stackrel{\Delta}{=} (2, 3, 5)$ ,  $s' \stackrel{\Delta}{=} (1, 4)$ .

A seguir, Zadeh [ZAD83b] utiliza o princípio do *Entailment* da Lógica Difusa segundo o qual de qualquer proposição difusa  $p$  pode-se inferir uma proposição difusa  $q$  se a distribuição de possibilidade induzida por  $p$  estiver contida na que é induzida por  $q$ . Zadeh [ZAD83b] representa este fato na seguinte forma semântica :

$$(6-74) \quad \begin{array}{c} p \longrightarrow \Pi_x^p = F \\ \downarrow \\ q \longleftarrow \Pi_x^q = G \supset F \end{array}$$

onde a seta " $\longleftarrow$ " significa que  $q$  é uma retradução da equação de designação possibilística  $\Pi_x^q = G$  se esta é uma tradução de  $q$ . Para uma maior simplicidade, Zadeh [ZAD83b] diz que  $\Pi_x^q$  pode ser inferida de  $\Pi_x^p \supset \Pi_x^p$ , ou seja :

$$(6-75) \quad \pi_x^q(u) \geq \pi_x^p(u) \text{ para todo } u \in U.$$

Da definição de  $\pi_{X(s)}(u(s))$ , expressa em (6-73), tem-se que :

$$(6-76) \quad \pi_{X(s)}(u(s)) \geq \pi_X(u) \quad \text{para todo } u \in U$$

e, portanto,  $\pi_{X(s)}$  pode ser inferido de  $\pi_X$ . Consequentemente,  $\pi_{X(s)}$  definido em (6-73) representa a distribuição de possibilidade desejada da variável de interesse, isto é,  $X(s) \triangleq (X_{i1}, \dots, X_{ik})$ . Uma vez que  $X(s)$  é dado pela projeção de  $\pi_X$  em  $U(s)$ , Zadeh [ZAD83b] refere-se à regra de inferência que produz  $\pi_{X(s)}$  como sendo a *Regra-P*, com *P* significando a *projeção* (item 6.3.2.b).

#### Exemplo 6-28 [ZAD83B]

Zadeh propõe uma ilustração em que a Base de Conhecimento possui apenas três proposições  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  que induzem, respectivamente, as distribuições de possibilidade  $\pi^1(x_2, x_3)$ ,  $\pi^2(x_1)$  e  $\pi^3(x_3, x_4)$ . Supõe-se que as variáveis de interesse são  $X_2$  e  $X_4$ . Deste modo, a função de distribuição de possibilidade de  $X_2$  e  $X_4$  é dada por :

$$\pi(x_2, x_4)(u_2, u_4) = \sup_{u_1, u_3} [\pi^1(x_2, x_3)(u_2, u_3) \wedge \pi^2(x_1)(u_1) \wedge \pi^3(x_3, x_4)(u_3, u_4)]$$

que se reduz a

$$(6-77) \quad \pi(x_2, x_4)(u_2, u_4) = \sup_{u_3} [\pi^1(x_2, x_3)(u_2, u_3) \wedge \pi^3(x_3, x_4)(u_3, u_4)]$$

se  $\pi^2(x_1)$  for uma distribuição de possibilidade *normalizada*, ou seja,

$$(6-78) \quad \sup_{u_1} \pi^2(x_1)(u_1) = 1$$

O membro direito da equação (6-77) constitui a *composição* de  $\pi^1(x_2, x_3)$  e  $\pi^3(x_3, x_4)$  com respeito a  $X_3$ .

Resumindo estes resultados teóricos, Zadeh [ZAD83b] afirma que, dada uma Base de Conhecimento, a distribuição de possibilidade,  $\pi^1(x_2, x_3)$  de uma subvariável especificada,  $X(s)$ , pode ser obtida projetando-se a distribuição de possibilidade global  $\pi_X$  em  $U(s)$ . A distribuição de possibilidade resultante,  $\pi_{X(s)}$ , pode ser expressa como uma composição com relação a  $X(s)$  daquelas distribuições de possibilidade constituintes que

tenham as variáveis em  $X(s)$ <sup>32</sup>. Por esta razão, Zadeh [ZAD83b] descreve a Regra-P como *Regra de Inferência Composicional*. Expressa como uma sequência de operações, a aplicação desta regra à BC pode ser expressa como uma cadeia :

$$(6-79) \quad \begin{array}{ccc} \{p_1, \dots, p_N\} & \xrightarrow{\text{tradução}} & \{\pi^1, \dots, \pi^N\} \xrightarrow{\text{conjunção}} \\ \{\pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^N\} & \xrightarrow{\text{projeção}} & \{\pi_{X(s)}\} \xrightarrow{\text{retradução}} q, \end{array}$$

onde a proposição *inferente*  $q$  é uma retradução de  $\pi_{X(s)}$ , que é a distribuição marginal de possibilidade da subvariável de  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X(s)$ , que é o objetivo do processo de inferência.

#### 6.4.5. Modus Ponens Generalizado

Quando se estudou o formalismo do Raciocínio Dedutivo, no capítulo II, viu-se na Lógica Proposicional que a base da maioria dos mecanismos de inferência presentes em sistemas especialistas era o *Modus Ponens* (item 2.2.1.a3). Em Lógica Difusa, há uma generalização deste mecanismo de inferência, denominada *Modus Ponens Generalizado* [ZAD83b]. Explicitamente, considere-se as seguintes proposições :

$$(6-80) \quad \begin{array}{l} p_1 \triangleq \text{Se } X \text{ é } F \text{ então } Y \text{ é } G \\ p_2 \triangleq X \text{ é } F^* \end{array}$$

onde  $F$ ,  $F^*$  e  $G$  são conjuntos difusos (ou equivalentemente predicados difusos).

Aplicando (6-69), (6-71) e (6-53), as traduções de  $p_1$  e  $p_2$  podem ser expressas como :

$$(6-81) \quad p_1 \longrightarrow \pi(Y/X) = H, \quad (6-82) \quad p_2 \longrightarrow \pi_X = F^*,$$

onde  $\mu_H(u,v)$  é dado por (6-53).

<sup>32</sup> Zadeh[83b] define  $X_l$  e  $X_m$  como sendo diretamente lincadas quando aparecem na mesma distribuição de possibilidade.  $X_l$  e  $X_m$  são transitivamente lincadas se existir uma cadeia de variáveis  $X_{c1}, \dots, X_{cr}$ , tal que  $(X_l, X_{c1}), \dots, (X_{cr}, X_m)$  são diretamente lincadas



Pode-se aplicar a regra de inferência composicional às duas expressões anteriores, obtendo-se a distribuição de possibilidade de  $Y$ , dada por :

$$(6-83) \quad \Pi_Y = H \circ F^*$$

onde o membro direito representa a composição de  $H$  e  $F^*$  com relação a  $X$ . Em termos mais explícitos :

$$(6-84) \quad \begin{aligned} \mu_Y(v) &= \sup_u (\mu_H(u, v) \wedge \mu_{F^*}(u)) \\ &= \sup_u (\mu_{F^*}(u) \wedge (1 - \mu_F(u) + \mu_G(u))) \end{aligned}$$

Agora, pode-se reescrever a inferência anterior :

$$(6-85) \quad \begin{array}{ll} p1 \triangleq \text{Se } X \text{ é } F \text{ então } Y \text{ é } G & \Pi(Y/X) = H, \\ p2 \triangleq X \text{ é } F^* & \Pi_X = F^*, \\ \hline Y \text{ é } H \circ F^* & \mu_Y(v) = \sup_u (\mu_{F^*}(u) \wedge (1 - \mu_F(u) + \mu_G(u))) \end{array}$$

Este esquema representa o *Modus Ponens Generalizado*.

Zadeh [ZAD83b] aponta como sendo duas as diferenças entre o Modus Ponens Generalizado e o Clássico. A primeira está no fato de  $F^*$  não ser necessariamente igual a  $F$ , como no caso clássico. A segunda, os predicados  $F$ ,  $G$  e  $F^*$  não são necessariamente rígidos. Há como se verificar que, quando  $F = F^*$  e  $F$  (e, portanto, também  $F^*$ ) e  $G$  são rígidos, a composição  $H \circ F^*$  reduz-se a  $G$  e torna-se a inferência clássica do Modus Ponens (vista no item 2.2.1.a3 do capítulo II).

#### 6.4.6. A Regra-PE

A regra de inferência composicional torna possível a dedução, a partir da BC, da distribuição de possibilidade de uma subvariável especificada,  $X(s)$ , da variável  $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$ . Zadeh [ZAD83b] ressalta, porém, que no caso geral do processo de inferência, não se procura  $X(s)$  e sim uma função especificada de  $X(s)$ , denotada por  $f(X(s))$ . Trata-se da formulação geral do problema de se encontrar uma resposta a uma questão relacionada com a informação presente na BC [ZAD83b].

Em Lógica Difusa, a Regra de Inferência Composicional assume papel central na formulação e solução deste problema ao tornar possível sua decomposição em dois subproblemas : (1) determinação da distribuição de possibilidade de  $X_{(s)}$ ; e (2) determinação da distribuição de possibilidade de  $f(X_{(s)})$  a partir do conhecimento de  $X_{(s)}$ . [ZAD83b]

Zadeh [ZAD83b] especifica ainda mais este procedimento : há a suposição de que uma questão está relacionada à distribuição de possibilidade de uma função  $f(X_{(s)})$ , cujo argumento é uma subvariável da variável na BC,  $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$  e que através do uso da regra de inferência composicional pode-se determinar a distribuição de possibilidade de  $X_{(s)}$ . Assim, pelo Princípio da Extensão (item 6.2.3), a determinação da distribuição de possibilidade de  $f(X_{(s)})$  é reduzida à solução do seguinte problema não-linear :

$$(6-86) \quad \pi_f(v) = \sup_{u(s)} (\pi_{X(s)}(u(s)))$$

sujeito a

$$(6-87) \quad f(u(s)) = v,$$

onde  $v$  é um valor genérico de  $f$  e

$$(6-88) \quad \pi_f(v) \triangleq \text{Poss} \{f = v\}$$

A Dedução em Lógica Difusa é baseada, por princípio, na solução do programa não-linear expresso em (6-86). De uma forma resumida, suponha-se que se está interessado em determinar o valor de uma variável desconhecida  $q$  que é expressa como uma função de um conjunto de variáveis  $X_{(s)}$ , restringidas por uma coleção de proposições na Base de Conhecimento BC. Se  $X_{(s)}$  é um subconjunto próprio das variáveis  $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$  que são restringidas por BC - como geralmente é o caso - deve-se, primeiro, encontrar a distribuição de possibilidade de  $X_{(s)}$ , através da projeção da distribuição global  $\Pi_X$  em  $U(s)$ . Então, aplica-se o Princípio da Extensão - como em (6-86) - para reduzir a determinação da distribuição de possibilidade de  $q$  para a solução do problema de maximização com restrições, no qual a função em questão é tratada

como uma restrição e a função objetivo é a distribuição de possibilidade de  $X(s)$ . A este processo de dedução, por conveniência, Zadeh [ZAD83b] dá o nome de *Regra-PE*, sendo que  $P$  e  $E$  significam *projeção* e *extensão*, respectivamente.

#### Exemplo 6-29 [ZAD83b]

Zadeh [ZAD83b] apresenta uma ilustração simples da aplicação da Regra-PE. Supõe-se que a base de conhecimento contém as seguintes proposições :

- $p_1 \triangleq$  John vive próximo a duas milhas de Henry.  
 $p_2 \triangleq$  Henry vive próximo de três milhas de Ed.  
 $q \triangleq$  Qual é a proximidade entre John e Ed ?

As variáveis na BC, neste caso, são as coordenadas da residência de John, Henry e Ed (i.e.  $(X_J, Y_J)$ ,  $(X_H, Y_H)$  e  $(X_E, Y_E)$ ). Após as traduções de  $p_1$  e  $p_2$ , as funções de distribuição de possibilidades que restringem estas variáveis são encontradas para expressarem :

$$\pi^1(X_J, Y_J, X_H, Y_H) = \mu_{\text{PRÓXIMO A } 2}(((X_J - X_H)^2 + (Y_J - Y_H)^2)^{1/2}),$$

$$\pi^2(X_H, Y_H, X_E, Y_E) = \mu_{\text{PRÓXIMO A } 3}(((X_H - X_E)^2 + (Y_H - Y_E)^2)^{1/2}),$$

onde  $\mu_{\text{PRÓXIMO A } 2}$  e  $\mu_{\text{PRÓXIMO A } 3}$  são as funções de pertinência dos conjuntos difusos PRÓXIMO A 2 e PRÓXIMO A 3, respectivamente.

A função que caracteriza a questão  $q$ , neste caso, é :

$$f(X_J, Y_J, X_E, Y_E) = ((X_J - X_E)^2 + (Y_J - Y_E)^2)^{1/2},$$

e, portanto, o problema não-linear cuja solução resolve a questão  $q$  pode ser expressa por :

$$\mu_f(d) = \sup_{X_J, Y_J, X_H, Y_H, X_E, Y_E} (\mu_{\text{PRÓXIMO A } 2}(((X_J - X_H)^2 + (Y_J - Y_H)^2)^{1/2})),$$

$$(6-89) \quad \wedge (\mu_{\text{PRÓXIMO A } 3}(((X_H - X_E)^2 + (Y_H - Y_E)^2)^{1/2}))$$

sujeito a

$$d = ((X_J - X_E)^2 + (Y_J - Y_E)^2)^{1/2}$$

onde  $d$  denota a distância de John a Ed.

Este problema, segundo Zadeh [ZAD83b], pode ser prontamente resolvido ao se aplicar a técnica de *conjunto-nível* da programação matemática difusa<sup>33</sup>. A solução produz  $d$  como um

<sup>33</sup> Este tópico foge ao escopo do presente trabalho. Porém, segundo Zadeh [ZAD83b], detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Carlsson [CAR81] e de Negoita e Ralescu [NEI75].

intervalo difuso (ou, equivalentemente, um número difuso) que pode ser expresso por :

$$(6-90) \quad \text{PRÓXIMO A } 3 \oplus \text{PRÓXIMO A } 2 \leq \text{PRÓXIMO A } 3 \ominus \text{PRÓXIMO A } 2$$

onde  $\oplus$  e  $\ominus$  denotam a adição difusa (item 6.2.3.c3) e a subtração difusa (item 6.2.3.c5), respectivamente.

Zadeh [ZAD83b] faz algumas observações sobre a solução. Primeiro, pode-se afirmar que a resposta é similar à que ocorreria se as distâncias em  $p_1$  e  $p_2$  fossem 2 milhas e 3 milhas, ao invés de *próxima a milhas 2* e *próximo a 3 milhas*, ou seja :

$$(6-91) \quad 3 - 2 \leq d \leq 3 + 2$$

Contudo, enquanto em (6-90) iniciou-se com distâncias difusas, expressas como números difusos, levando a uma resposta difusa, também expressa como número difuso, no caso de (6-91) iniciou-se com números reais e terminou-se com uma resposta na forma de intervalo de valores. Obviamente, isto ocorre porque a informação na base de conhecimento está incompleta em relação à questão colocada. Segundo Zadeh, é importante que se reconheça que isto é um fenômeno penetrante em sistemas especialistas, razão pela qual o fator de certeza de uma conclusão deveria ser, em geral, um intervalo de valores ou um número difuso, ao invés de um número real, como geralmente assume-se ser [ZAD83b].

Além disso, se na declaração do problema, as distâncias fossem especificadas precisamente, os limites superior e inferior em (6-91) seriam dados pelas soluções dos seguintes problemas não-lineares [ZAD83b] :

$$(6-92) \quad d_{\max} = \sup_{X_J, Y_J, X_H, X_E, Y_E} ((X_J - X_E)^2 + (Y_J - Y_E)^2)^{1/2}$$

$$(6-93) \quad d_{\min} = \inf_{X_J, Y_J, X_H, X_E, Y_E} ((X_J - X_E)^2 + (Y_J - Y_E)^2)^{1/2}$$

sujeito a

$$(6-94) \quad \begin{aligned} &((X_J - X_H)^2 + (Y_J - Y_H)^2)^{1/2} = 2 \\ &((X_H - X_E)^2 + (Y_H - Y_E)^2)^{1/2} = 3 \end{aligned}$$

O interesse é observar que as partes das restrições e das funções objetivo em (6-92) e (6-93) são trocadas em relação àquelas em (6-89). De fato, Zadeh ressaltava o fato de que a formulação expressa em (6-89) envolve (6-92) e (6-93) é dual a elas [ZAD83b].

#### 6.4.7. Interpolação

Zadeh [ZAD83b] discute um importante problema que surge na operação de qualquer sistema baseado em regras, o qual é relatado a seguir. Supõe-se que o usuário atribui um fato cuja

forma canônica possa ser expressa por  $X$  é  $F^*$ , onde  $F$  é um predicado difuso ou não. Além disso, supõe-se que não exista regra condicional na BC cujo antecedente cubra  $F$  exatamente. A questão que surge é : Quais regras deveriam ser executadas e como se deveria combinar seus resultados ? [ZAD83b].

A abordagem sugerida na Lógica Difusa envolve a utilização da técnica de *interpolação*, que é baseada na Regra-P e, segundo Zadeh, está no âmago do Modus Ponens Generalizado. Especificamente, o autor supõe que a tradução de um grupo de proposições na BC possa ser expressa como uma relação difusa na forma :

R	$X_1$	$X_2$	...	$X_n$	$X_{n+1}$
	$R_{11}$	$R_{12}$	...	$R_{1n}$	$Z_1$
	.	.		.	.
	.	.		.	.
	.	.		.	.
	$R_{m1}$	$R_{m2}$	...	$R_{mn}$	$Z_m$

TABELA 6-2 : Relação Difusa que expressa a tradução de um grupo de proposições em uma Base de Conhecimento.

na qual as células são conjuntos difusos; as variáveis de entrada são  $X_1, \dots, X_n$  com domínios  $U_1, \dots, U_n$ ; e a variável de saída é  $X_{n+1}$  com domínio  $U_{n+1}$ . O problema é : "dada uma  $n$ -tupla de entrada  $(R_1, \dots, R_n)$ , na qual  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , é um subconjunto difuso de  $U_j$  que é o valor de  $X_{n+1}$  expresso como um subconjunto difuso de  $U_{n+1}$  ?" [ZAD83b].

Segundo Zadeh [ZAD83b] uma relação difusa que é representada na forma *tableau* da tabela 6-2 pode ser definida de diferentes formas. Uma das definições possíveis, apresentada por Zadeh, enquadra-se no espírito da definição padrão de uma relação como sendo uma coleção de *tuplas*. Especificamente [ZAD83b] :

$$(6-95) \quad R = R_{11} \times \dots \times R_{1n} \times Z_1 + \dots + R_{m1} \times \dots \times R_{mn} \times Z_m,$$

onde "x" e "+" denotam o produto cartesiano e a união, respectivamente.

Baseando-se nesta interpretação de  $R$ , Zadeh [ZAD83b] deriva o valor desejado  $X_{n+1}$  do seguinte algoritmo :

- a) Primeiro computa-se, para cada par  $(R_{ij}, R_j^*)$ , o grau de consistência da entrada  $R_j^*$  com o elemento  $R_{ij}$  de  $R$ ,  $i = 1, \dots, n$ . O grau de consistência, denotado  $\gamma_{ij}$ , é definido por :

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &\triangleq \sup (R_{ij} \cap R_j^*) \\ (6-96) \quad &= \sup (\mu_{R_{ij}}(u_j) \wedge \mu_{R_j^*}(u_j)) \end{aligned}$$

onde  $\mu_{R_{ij}}$  e  $\mu_{R_j^*}$  são funções de pertinência de  $R_{ij}$  e  $R_j^*$ , respectivamente e  $u_j$  é um elemento genérico de  $U_j$ .

- b) A seguir, computa-se o grau de consistência geral,  $\gamma_i$ , da  $n$ -tupla de entrada,  $(R_i^*, \dots, R_n^*)$ , com a  $i$ -ésima linha de  $R$ ,  $i = 1, \dots, m$ , aplicando-se o operador  $\wedge$  (mínimo) como operador de agregação. Assim :

$$(6-97) \quad \gamma_i = \gamma_{i1} \wedge \gamma_{i2} \wedge \dots \wedge \gamma_{in}$$

Neste caso,  $\gamma_i$  pode ser interpretado como uma medida conservativa da concordância entre a  $n$ -tupla de entrada  $(R_i^*, \dots, R_n^*)$ , com a  $i$ -ésima linha da  $n$ -tupla,  $(R_1, \dots, R_n)$ . Assim, aplicando-se  $\gamma_i$  como um coeficiente de peso, a expressão desejada para  $X_{n+1}$  pode ser escrita como uma combinação "linear" [ZAD83b] :

$$(6-98) \quad X_{n+1} = \gamma_1 \wedge Z_1 + \dots + \gamma_m \wedge Z_m$$

onde "+" denota a união e  $\gamma_i \wedge Z_i$  é um conjunto difuso definido por :

$$(6-99) \quad \mu_{\gamma_i \wedge Z_i}(u_{i+1}) = \gamma_i \wedge \mu_{Z_i}(u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, m.$$

Zadeh [ZAD83b] ressalta que se nenhuma linha de  $R$  tem um alto grau de consistência com a  $n$ -tupla de entrada, o valor da variável de saída,  $X_{n+1}$ , será um conjunto difuso *subnormal*, ou seja, seu máximo grau de pertinência será menor que a unidade. Além disso, o menor grau de consistência será o maior grau de subnormalidade. Assim, para conseguir um alto grau de normalidade na saída, é necessário que ao menos uma das linhas de  $R$  tenha um alto grau de consistência com a  $n$ -tupla de entrada [ZAD83b].

### 6.5. UMA SHELL PARA SISTEMAS ESPECIALISTAS DIFUSOS

Uma das ferramentas mais desenvolvidas em Inteligência Artificial tem sido a *Shell*. Uma Shell consiste em um sistema com todas as partes constituintes de um sistema especialista, com excessão da base de conhecimento. Assim, cabe ao engenheiro de conhecimento colocar no sistema apenas as regras (conhecimento) adquiridas junto ao especialista, uma vez que a Shell já possui o mecanismo de inferência para manipulá-las. Além de auxiliar o engenheiro de conhecimento, as Shells têm por objetivo permitir ao próprio especialista entrar com suas regras e familiarizar-se com a Inteligência Artificial.

Paralelamente à construção de Sistemas Especialistas Difusos, os pesquisadores têm procurado construir Shells para sistemas especialistas que possam manipular a imprecisão na forma de Difusão. Dentre estes trabalhos, destaca-se o sistema Z-II, construído por Leung e Lam ([LEU88] e [LEU89]), o qual pode tratar tanto o raciocínio exato como o inexato. Neste sistema, pode-se inserir fatos ou regras em que a imprecisão está presente em suas diversas formas (incerteza e difusão isoladas ou simultâneas) ou mesmo ausentes (fatos ou regras certos).

O objetivo desta seção é apresentar os mecanismos através dos quais o sistema Z-II manipula as imprecisões no conhecimento. Deste modo, ter-se-á um desenvolvimento mais transparente dos mecanismos de inferência que a Lógica Difusa utiliza quando trata a imprecisão em suas diversas formas.

#### 6.5.1. A Lógica Difusa no Tratamento do Conhecimento Inexato

A fim de se visualizar os fundamentos nos quais está baseado o tratamento de imprecisão no sistema Z-II, deve-se considerar os próprios princípios nos quais a Lógica Difusa apóia seus procedimentos. Por exemplo, quando um conceito difuso como *alto* deve ser tratado segundo a Lógica Difusa, deve-se ter

associado um conjunto difuso que represente este conceito, como o conjunto na figura 6-8 [LEU88].

ALTURA (m)	GRAU DE PERTINÊNCIA (VALOR DE POSSIBILIDADE)
1,32	0,0
1,42	0,0
1,52	0,1
1,63	0,2
1,73	0,7
1,83	0,9
1,93	1,0
2,03	1,0

FIGURA 6-8 : Conjunto Difuso "Alto" - Fonte [LEU88].

Os graus de pertinência de cada altura ao conjunto *Alto* também são vistos como valores que formam uma distribuição de possibilidade do termo *Alto*. Em raciocínio aproximado, é comum a presença de modificadores como  *muito*, *aproximadamente*, *quase*, etc. Pode-se obter a distribuição de possibilidades referente aos conceitos difusos *Muito Alto* e *Quase Alto* através da aplicação de operações aritméticas aos conjuntos difusos do termo difuso básico *Alto*. Por exemplo, para o conjunto da figura 6-8, pode-se representar o conceito difuso *Muito Alto* através da aplicação da operação quadrado em cada um dos valores de possibilidade do conjunto básico *Alto*, como mostrado na figura 6-9 [LEU88].

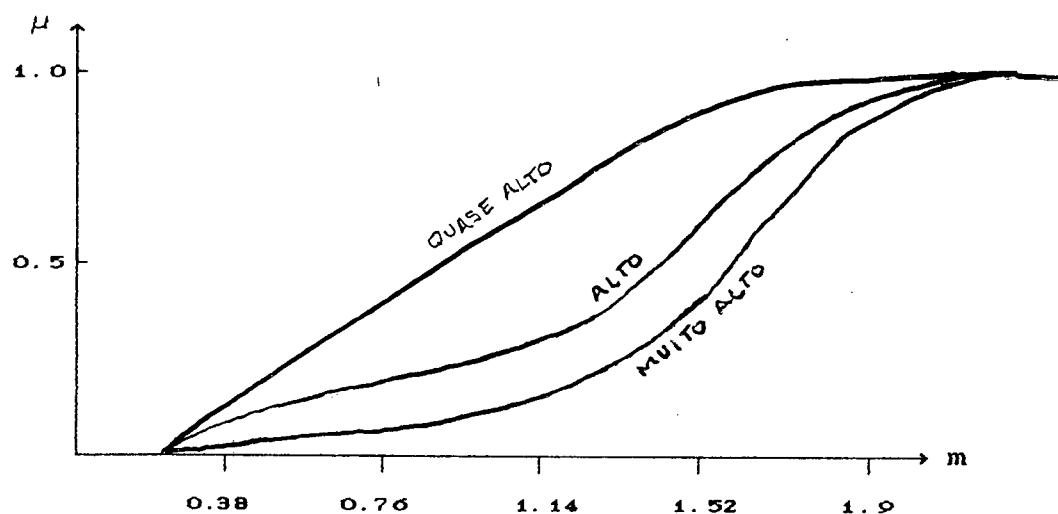


FIGURA 6-9 : Conjuntos Difusos de Modificadores de Termos Difusos  
FONTE [LEU88].



No sistema Z-II, outro conceito importante na formalização das regras é o de *Relação Difusa*. Leung e Lam [LEU88] exemplificam através da regra

"Se o preço é *alto*, então o Lucro é *bom*".

Nesta, a implicação entre os conceitos difusos *alto* e *bom* pode ser modelada por uma relação difusa  $R$ . Dados  $A_1$  e  $A_2$  dois conjuntos difusos representando *alto* e *bom* respectivamente (expressos como vetores), obtém-se a relação difusa  $R$ , representada por uma matriz, através de operações difusas em  $A_1$  e  $A_2$ . É exatamente neste ponto que surgem as divergências entre as várias formas de modelar esta relação difusa, já que muitos pesquisadores têm apresentado diferentes métodos para computar a relação difusa  $R$  (como evidenciado em [MIZ79]).

Considerando ainda a relação  $R$  acima, pode-se admitir adicionalmente a inclusão do seguinte fato :

"O preço está *muito alto*".

O conceito difuso *muito alto* pode ser representado por um conjunto difuso  $F$ , o qual é obtido mediante a aplicação de uma operação sobre  $A_1$  (no caso, o quadrado). A seguir, determina-se o conjunto difuso  $C$ , representando o termo difuso que deve estar associado à conclusão. No sistema Z-II, isto é feito pela aplicação do operador difuso *Composição* (aqui denotado por  $\circ$ ) em  $F$  e  $R$  :  $C = F \circ R$ , ou explicitamente [LEU88] :

$$(6-100) \quad C = F \circ R, \quad \text{com } \mu_C(x) = \max_v [\min (\mu_F(v), \mu_R(v, x))]$$

onde  $\mu_C(x)$  é uma função de pertinência e  $v$  e  $x$  são os elementos do universo do discurso [MIZ79]. Após a aplicação desta expressão, o vetor  $C$  indicará o termo difuso *muito bom*, sendo formada a conclusão "O lucro é *muito bom*". Esta é a operação de inferência mais simples entre um fato e uma regra contendo termos difusos.

### 6.5.2. A Descrição Geral do Sistema Z-II

Segundo Leung e Lam [LEU88], a principal característica do sistema Z-II é o fato de ele permitir a mistura de termos normais com termos difusos, além de incertezas nos fatos e nas regras. O sistema executa esta tarefa aplicando a Lógica Difusa para manusear o raciocínio inexato (ou aproximado) e números difusos para tratar a incerteza difusa.

Leung e Lam [LEU89] apresentam uma descrição geral do sistema Z-II, onde se pode visualizar a inter-relação entre suas diversas partes constituintes. De acordo com a Figura 6-10, os peritos transferem seu conhecimento para a base de conhecimento através do *Subsistema de Aquisição de Conhecimento*. Segundo os autores, há a preocupação com a máxima facilidade na efetivação desta etapa, a fim de que os peritos necessitem minimamente consultar os engenheiros de conhecimento. O conhecimento inserido é fundamentalmente armazenado na forma de regras. Depois de entrar com o conhecimento, o especialista pode "salvar" a base de conhecimento em uma armazenagem externa, para usá-la posteriormente.

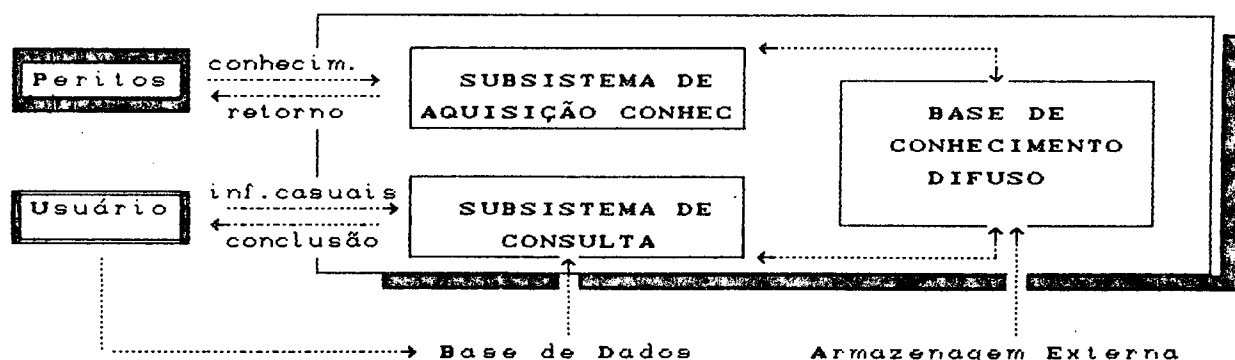


FIGURA 6-10 : Principais Componentes do Sistema Z-II  
FONTE [LEU89]

Outro participante fundamental no esquema da figura 6-10 é o usuário. Este pode consultar o sistema, encontrando o conhecimento específico dos peritos que for requerido à base. Isto se dá no *Subsistema de Consulta*, onde o sistema interpreta a base de conhecimento e reúne os dados relevantes para o caso em

questão, através de perguntas ou consulta à base externa. Por último, o sistema deriva suas conclusões aplicando o conhecimento às informações casuais relevantes. Neste ponto, o usuário pode fazer revisões e questionar o sistema sobre seu raciocínio [LEU89].

### 6.5.3. Arquitetura do Sistema Z-II

Os três principais módulos do sistema Z-II apresentados na figura 6-10 possuem subdivisões de acordo com as tarefas específicas executadas por cada um deles. Leung e Lam ([LEU88] e [LEU89]) descrevem em detalhes cada um destes módulos, o que é retomado na próxima seção.

#### 6.5.3.a. Subsistema de Aquisição de Conhecimento

O Subsistema de Aquisição do Conhecimento subdivide-se em Módulos de Tratamento de *Objetos*, *Termos Difusos*, *Fatos*, *Regras* e *Propriedades do Sistema*. É nestes módulos que ocorrem a aquisição e o tratamento das regras e fatos do sistema. A seguir, explicita-se os procedimentos afetos a cada um destes módulos, de acordo com [LEU88] e [LEU89].

##### 6.5.3.ai. Módulo de Tratamento de Objetos

No sistema Z-II, um *objeto* é uma entidade básica, constituída unicamente por dois elementos : o nome do objeto e um atributo. Por exemplo, o termo "peso do corpo" é representado pelo objeto **PESO CORPO**, onde **CORPO** é o nome do objeto e **PESO** seu atributo. No sistema Z-II, permite-se que o atributo seja vazio sempre que o nome do objeto for suficiente para representá-lo [LEU89].

Cada objeto possui um número pré-definido de *slots*, identificados pelos nomes dos *slots*. As propriedades do objeto são especificadas pelo conteúdo dos *slots*. Os conteúdos dos *slots* tornam-se transparentes ao especialista e ao usuário, já que o sistema Z-II adquire ou atualiza estes conteúdos através de um sistema pergunta-resposta, com interface em linguagem natural. A

figura 6-11 apresenta os conteúdos de cada *slot* no sistema Z-II.

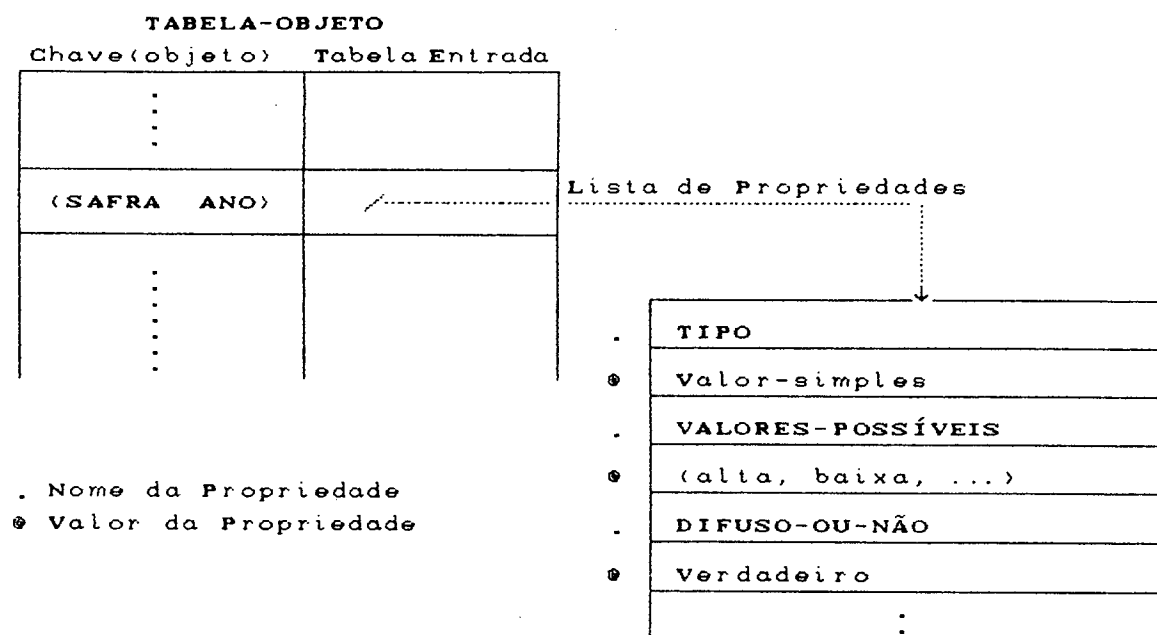
S L O T	C O N T E Ú D O
TIPO	Indica o Tipo do Objeto
VALORES-POSSÍVEIS	Especifica os Possíveis Valores do Objeto
DIFUSO-OU-NÃO	Indica se o Objeto é Difuso ou Não
EXTENSÃO-NÚMERO	Especifica a Extensão dos Números, se o Tipo do Objeto é Numérico
PERGUNTA-PRIMEIRO-OU-NÃO	Indica se o Valor deste Objeto é obtido primeiro por Perguntas ou por Dedução dos fatos conhecidos e regras
MENSAGEM-IMEDIATA	Especifica a Pergunta feita ao Usuário para obter o valor. O Sistema pode automaticamente gerar questões se este conteúdo do slot estiver vazio
USADO-PELAS-REGRAS	Lista das Regras cujas partes antecedentes contém este objeto
ATUALIZADO-PELAS-REGRAS	Lista das Regras cujas partes consequentes contém este objeto
LISTA-VALORES	Lista dos Valores Obtidos para este Objeto
LISTA-DISTRIBUIÇÃO-PERTIN.	Lista das respectivas Distribuições de Pertinência de Conjuntos Difusos para os Valores Difusos Obtidos
LISTA-VALORES-INCERTOS	Lista das respectivas Incertezas Difusas para os Valores Obtidos

FIGURA 6-11 : Conteúdos dos Slots de um Objeto - FONTE [LEU89].

O Módulo de Tratamento de Objetos possui rotinas para manipular objetos bem como o conteúdo de seus *slots*.

O *slot* TIPO indica o tipo do objeto. Existem, no sistema Z-II, quatro tipos de objetos : sim/não, numérico, valor-simples e múltiplos-valores. Objetos do tipo sim/não são objetos booleanos, ou seja, seus valores podem ser somente "verdadeiro" ou "falso". Objetos do tipo numérico têm seus valores restritos a quantidades numéricas. Os objetos do tipo valor-simples podem ter somente um valor de muitas quantidades possíveis, mutuamente exclusivas. Os objetos do tipo múltiplos-valores, no entanto, apresentam vários valores ao mesmo tempo [LEU89].

Quando um objeto é difuso, seus valores podem ser termos difusos. A indicação da difusibilidade ou não de um objeto se dá no slot **DIFUSO-OU-NÃO** [LEU89]. Um exemplo de objeto difuso pode ser o termo "a safra deste ano", representado pelo objeto **SAFRA ANO** cujos valores podem ser "alta", "baixa", etc.



**FIGURA 6-12** : Implementação de uma Tabela de Subdivisões de um Objeto - FONTE [LEU89] (Modificado).

Os slots **VALORES-POSSÍVEIS**, **EXTENSÃO-NÚMERO**, **MENSAGEM-IMEDIATA**, **USADO-PELAS-REGRAS** e **ATUALIZADO-PELAS-REGRAS** contém informações relevantes no mecanismo de inferência, o qual será descrito posteriormente. O slot **LISTA-VALORES** contém os valores atribuídos ao objeto, sendo que as respectivas informações numéricas destes valores estão nos slots **LISTA-VALORES-INCERTOS** e **LISTA-DISTRIBUIÇÃO-PERTINÊNCIA**.

A figura 6-12 apresenta o exemplo da tabela onde estão gravadas algumas das informações referentes ao objeto **SAFRA ANO**.

#### 6.5.3.2. Módulo de Tratamento de Termos Difusos

Quando o slot **DIFUSO-OU-NÃO** contiver a classificação "Verdadeiro", os valores que o objeto em questão pode assumir são expressões difusas (e.g. "alto", "muito quente", etc). Estes

termos difusos, no sistema Z-II, são descritos por conjuntos difusos, os quais são representados por listas de números. O Módulo de Tratamento de Termos Difusos possui rotinas para definir os conjuntos difusos de termos difusos correspondentes [LEU88].

Leung e Lam [LEU89] justificam a utilização de rotinas na linguagem LISP para este módulo pela facilidade com que esta efetua as operações em listas, as quais definem os conjuntos difusos. Assim, as eventuais operações sobre conjuntos difusos são computacionalmente simplificadas. Entretanto, experiências do grupo de trabalho do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGEP - UFSC) têm indicado que na linguagem Prolog pode-se perfeitamente definir funções de manipulação de listas que também facilitariam a implementação computacional das operações sobre conjuntos difusos ([SEC90], [BAR91a] e [BAR91b]).

Leung e Lam [LEU89] apresentam o seguinte exemplo de operação em conjuntos difusos, através de manipulação de listas, realizadas no sistemas Z-II :

(função-def intersecção-conjdif (A B) (mapear MIN A B))

#### 6.5.3.3. Módulo de Tratamento de Fatos

Há duas formas pelas quais o sistema Z-II adquire o conhecimento dos fatos : os fatos podem ser fornecidos pelo usuário através de sentenças em inglês ou podem ser coletados pelo sistema através de perguntas que este faz ao usuário quando, durante a inferência, verifica-se que algum fato necessário não está disponível. Estas duas formas são disponíveis no Módulo de Tratamento de Fatos [LEU88].

Genericamente, um fato no sistema Z-II é uma proposição na seguinte forma [LEU88] :

**OBJETO é VALOR** (incerteza difusa/não difusa)

Quando o objeto é do tipo numérico, **VALOR** contém um

número e quando for normal (não-numérico) **VALOR** contém um símbolo. Os objetos difusos assumem como valor conceitos difusos (e.g. "muito caro", "mais ou menos quente"), representados por conjuntos difusos obtidos pela aplicação de operações aritméticas nos conceitos difusos básicos (e.g. quadrado e raiz quadrada nos conjuntos *caro* e *quente*, respectivamente). No sistema Z-II, há uma rotina específica para executar esta tarefa [LEU88].

A incerteza no sistema Z-II é geralmente representada por um valor numérico, também chamado *fator de certeza*, como em MYCIN, com a diferença que este valor pode ser também difuso, ou seja, admite-se fatores de certeza como "por volta de 0.7", "quase 0.9", etc. Nestes casos, a incerteza é modelada por conjuntos difusos convexos e normalizados ([LEU88] e [LEU89]).

Para representar uma descrição lingüística de um fator de certeza difuso, assume-se a seguinte estrutura no sistema Z-II [LEU89] :

```
FC-DIFUSO ::= MODIFICADOR <fc> / MODIFICADOR <fc>
              para MODIFICADOR <fc>
MODIFICADOR ::= muito próximo a / próximo a / ao redor / sobre /
               aproximadamente / mais ou menos / possivelmente /
               muito possivelmente / dificilmente / muito
               dificilmente / ε
```

onde <fc> é um fator de certeza entre 0 e 1.

ε representa um string vazio (fc idêntico ao do MYCIN)

Tanto números difusos como números ordinários podem ser utilizados em operações aritméticas (e.g. multiplicação, adição), fornecendo outro número difuso como resultado. Leung e Lam [LEU88] salientam que a incerteza difusa é opcional, podendo-se ainda ter incertezas não-difusas, expressas por fatores de certeza ordinários e a certeza absoluta, adotando-se  $fc = 1$ .

Assim que uma sentença é fornecida ao sistema, o Módulo de Tratamento de Fatos faz uma análise, extraíndo o objeto e o valor. Posteriormente, o sistema solicita ao usuário a certeza associada ao fato, estocando os valores, distribuições de certezas

e possibilidades nos *slots* **LISTA-VALORES**, **LISTA-VALORES-INCERTOS** e **LISTA-DISTRIBUIÇÃO-PERTINÊNCIA** respectivamente, em relação aos objetos correspondentes.

#### 6.5.3.a4. Módulo de Tratamento de Regras

Este módulo é responsável pela aquisição das regras que representam o conhecimento do especialista do domínio. No sistema Z-II, uma regra é uma implicação entre proposições antecedentes (premissas) e conseqüentes (conclusões). Associada a cada regra, está uma incerteza difusa ou não que descreve o grau com o qual o especialista confia nesta regra [LEU88].

As relações entre os fatos que compõem a premissa de uma regra podem assumir diferentes formas (e.g. disjunção, conjunção). No sistema Z-II, estas relações são expressas pelos conectivos lógicos E e OU. Para a parte conseqüente da regra, no entanto, admite-se apenas uma única proposição ou várias ligadas somente pelo conectivo E, uma vez que a existência de conectivos OU comprometeria o mecanismo de inferência do sistema [LEU88].

A estrutura das regras em Z-II pode ser mostrada pelo seguinte exemplo [LEU88]:

```

CÓDIGO-REGRA: regra 01
SE              : (o corpo é bem-formado OU a altura é alta) E
                  a pessoa é saudável
ENTÃO           : o peso da pessoa é pesado
COM CERTEZA    : próxima a 1.0
  
```

Uma das partes mais importantes de uma shell é seu módulo de tratamento de regras. Ele deve proporcionar ao usuário facilidades de incluir, extrair ou modificar regras. Leung e Lam [LEU89] atribuem esta qualidade ao sistema Z-II. Cada regra no sistema é identificada por um código atribuído pelo especialista e tem associado *slots* com as seguintes informações :

Slot	Conteúdo
PROPOSIÇÕES-ANTE	proposições antecedentes de uma regra.
PROPOSIÇÕES-CONQ	proposições conseqüentes de uma regra.
INCERTEZA-DIFUSA	incerteza associada à regra.



As proposições que formam o antecedente de uma regra consistem cada uma de uma tripla da forma (FUNÇÃO-ANTE OBJETO-ANTE VALOR-ANTE). Leung e Lam [LEU89] exemplificam esta estrutura com a proposição "o corpo é gordo", a qual é representada pelo objeto (/IGUAL/ (ESPAÇO CORPO) GORDO). A FUNÇÃO-ANTE é /IGUAL/, o OBJETO-ANTE e o VALOR-ANTE são (ESPAÇO CORPO) e GORDO, respectivamente. No sistema Z-II, o antecedente global de uma regra é representado por uma lista de proposições. Por exemplo, considerando-se novamente a regra 01 citada acima, a representação de seu antecedente global seria [LEU89] :

(E (OU (/IGUAL/(ESPAÇO CORPO) BEM-FORMADO)  
 (/IGUAL/ (ESPAÇO ALTURA) ALTA))  
 (/IGUAL/(ESPAÇO PESSOA) SAUDÁVEL))

Durante a aquisição das regras junto ao especialista, o sistema Z-II permite que este as formule baseado em conceitos difusos. Estes conceitos podem assumir duas formas distintas, ou seja, podem ser expressões difusas ou comparações difusas. Leung e Lam [LEU89] abordam em detalhes os diversos tipos de conceitos difusos admissíveis em Z-II, como pode-se verificar a seguir.

### 1) Expressão Difusa

Nas proposições antecedentes, objetos com um único ou com múltiplos valores podem ser quantificados por expressões difusas, na seguinte forma :

antecedente : <termo-objeto> é <expressão-difusa>  
 lista : (/IGUAL/ OBJETO LISTA-EXP-DIFUSA)

exemplo : SE a inteligência é muito alta  
 Lista : (/IGUAL/ (espaço "inteligência") ("muito alta"))

Quando surgir um fato com o conceito difuso básico associado ao espaço "inteligência" que cubra "muito alto", esta regra será satisfeita. A inferência, então, segue os mecanismos associados ao Raciocínio Aproximado, descritos anteriormente no item 6.5.1 [LEU89].

## II) Comparações Difusas

Objetos do tipo numérico podem ter associadas comparações difusas nas proposições antecedentes do sistema Z-II. Nestes casos, tem-se associado um valor entre 0 e 1 que denota o grau de cobrimento  $d$ . De acordo com o tipo de comparação e com o tipo de conjunto difuso envolvido, tem-se 8 formas diferentes de comparações difusas, abordadas por Leung e Lam [LEU89].

i) Igualdade "=" com um intervalo de números

forma geral : <termo-objeto> = LIMITE-INFERIOR LIMITE-SUPERIOR  
 lista : (/= SINAL/ OBJETO (LIMITE-INFERIOR LIMITE-SUPERIOR))

exemplo : SE o peso = 80 90  
 Lista : (/= SINAL) (espaço "peso") (80 90)

Sempre que um fato quantificar o objeto entre os limites especificados, a condição é satisfeita. O grau de cobrimento é 1 quando a condição for satisfeita e 0 quando não.

ii) Igualdade "=" com número difuso triangular

forma geral: <termo-objeto> = LIMITE-INFERIOR PICO LIMITE-SUPERIOR  
 lista : (/=SINAL/OBJETO(LIMITE-INFERIOR PICO LIMITE-SUPERIOR))

exemplo : SE a pressão do sange = 70 80 90  
 Lista : (/= SINAL) (espaço "pressão sangue") (70 80 90)

A condição torna-se satisfeita para fatos com valor  $x$  associado ao objeto entre os limites inferior e superior. A diferença para o caso anterior é que, agora, o grau de cobrimento  $d$  é igual ao valor de pertinência  $\mu$  de  $x$  ao conjunto difuso triangular (LIMITE-INFERIOR PICO LIMITE-SUPERIOR), como mostrado na figura 6-13 [LEU89].

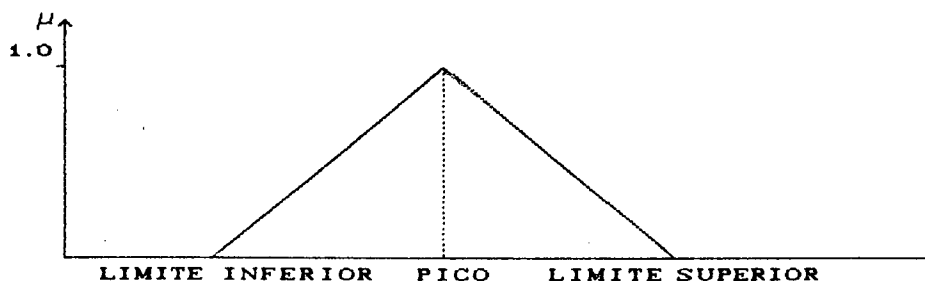


FIGURA 6-13 : Igualdade com Número Difuso Triangular  
 FONTE [LEU89]

iii) Igualdade "=" com número difuso trapezoidal

forma geral : <termo-objeto> = LIMITE-INFERIOR PICO 1 PICO 2  
LIMITE-SUPERIOR

lista : (/= SINAL/ OBJETO (LIMITE-INFERIOR PICO 1 PICO 2  
LIMITE-SUPERIOR))

exemplo : SE a pressão do sangue = 70 80 90 100

Lista : (/= SINAL) (espaço "pressão do sangue") (70 80 90  
100)

A validação e o grau de cobrimento das regras por fatos é idêntica ao caso (ii). A diferença está somente na forma do conjunto difuso da figura 6-13, que passa a ter um intervalo (entre PICO 1 e PICO 2) com  $\mu = 1$ .

iv) Maior ou Igual ">=" a um intervalo de números

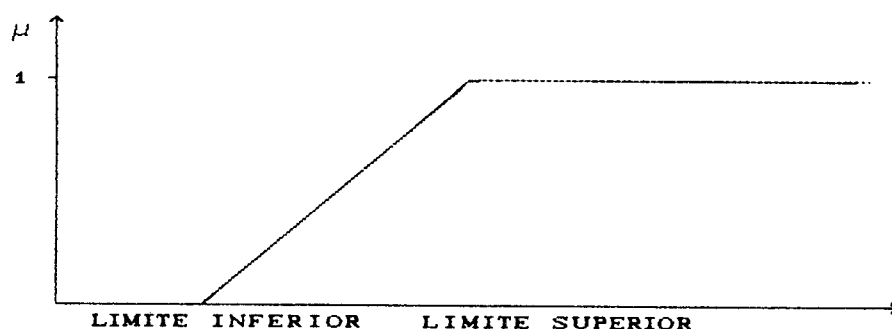


FIGURA 6-14 : ">=" a um Intervalo de Números - FONTE [LEUB9]

forma geral: <termo-objeto> >= LIMITE-INFERIOR LIMITE-SUPERIOR

lista : (/= SINAL/ OBJETO (LIMITE-INFERIOR LIMITE-SUPERIOR))

exemplo : SE o peso >= 80 90

Lista : (/= SINAL) (espaço "peso") (80 90)

Sempre que um fato quantificar o objeto como maior que o LIMITE-INFERIOR, a condição é satisfeita. O grau de cobrimento é mostrado na figura 6-14.

v) "<=" a um intervalo de números

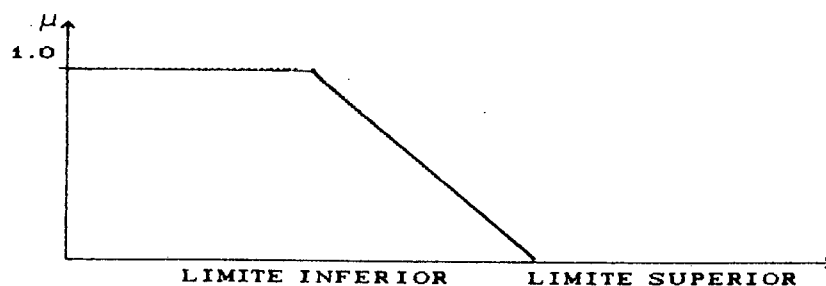


FIGURA 6-15 : "<=" a um Intervalo de Números - FONTE [LEUB9]

forma geral: <termo-objeto> <= LIMITE-INFERIOR LIMITE-SUPERIOR  
 lista : (/(<= SINAL/ OBJETO (LIMITE-INFERIOR LIMITE-SUPERIOR))  
 exemplo : SE o peso <= 80 90  
 Lista : (/(<= SINAL) (espaço "peso") (80 90)

Sempre que um fato quantificar o objeto como menor que o LIMITE-SUPERIOR, a condição é satisfeita. O grau de cobrimento é mostrado na figura 6-15.

vi) "<>" a um intervalo de números, "<>" a um número difuso triangular e "<>" a um número difuso trapezoidal

Leung e Lam [LEU89] tratam estes casos de maneira análoga aos respectivos casos de igualdade. A diferença está nas distribuições para o grau de cobrimento que revertem verticalmente (ie. o grau  $\mu$  aqui passa a ser  $1 - \mu$  do caso das igualdades).

Finalmente, no Módulo de Tratamento de Regras há ainda a implementação das proposições conseqüentes. Cada uma destas proposições é formalizada como uma tripla na forma (FUNÇÃO-CONQ OBJETO-CONQ VALOR-CONQ). A parte conseqüente global é implementada como uma lista de proposições. Pode-se exemplificar tomando-se o exemplo da regra 01 anterior [LEU89] :

(E (/CONCLUSÃO/ (PESO DA PESSOA) PESADO)

#### 6.5.3.25. Módulo de Tratamento das Propriedades do Sistema

Leung e Lam [LEU88] não explicitam muito este módulo do sistema Z-II. Os autores afirmam que ele é responsável pela manipulação das propriedades da base de conhecimento do sistema, sendo tais propriedades dadas por :

<i>Propriedade</i>	<i>Conteúdo</i>
<b>META-OBJETOS</b>	Especifica os objetos que são objetivo para a Base de Conhecimento
<b>OBJETOS-PERGUNTA-INICIAL</b>	Especifica quais objetos serão investigados em primeiro lugar, no início de uma consulta.
<b>DESCRIÇÃO-DOMÍNIO</b>	Armazena as descrições de um domínio

#### 6.5.3.b. O Subsistema de Consulta

O Subsistema de Consulta subdivide-se em três módulos : Mecanismo de Inferência, Rotina de Aproximação Lingüística e Módulo de Revisões. A seguir, aborda-se cada um destes módulos.

### 6.5.3.b1. Mecanismo de Inferência

Neste módulo, tem-se o controle do processo de consulta através da interpretação das informações na base de conhecimento e da elucidação dos dados (fatos) casuais relevantes. Esta elucidação se dá através de perguntas ao usuário ou de consultas à base de conhecimento, no caso dos fatos já estarem disponíveis.

Leung e Lam [LEU89] estruturam as explicações no Mecanismo de Inferência em 5 níveis, sendo que os dois últimos são os próprios módulos de Aproximação Lingüística e de Revisões que aqui são colocados separadamente. A seguir, cada um dos 3 primeiros níveis é elucidado.

#### 1) Cadeia de Raciocínio

Durante o processo de consulta, o sistema Z-II adota a inferência na forma de encadeamento para trás (*backward chaining*). Os autores justificam afirmando que este procedimento faz com que o questionamento garantidamente seguirá o objetivo focalizado. Uma das formas possíveis de questionamento do usuário é a seguinte [LEU88] :

Qual deveria ser <OBJETO> ? Por exemplo :  
Qual deveria ser o peso da pessoa ?

Neste exemplo, o META-OBJETO é PESO PESSOA. O sistema toma este objeto como sendo o de mais alto nível na árvore de busca e procura as regras cuja parte conseqüente têm PESO PESSOA em suas proposições. Para obter esta informação, o sistema consulta o slot ATUALIZADO-PELAS-REGRAS do referido objeto. Caso o usuário selecione o módulo automático de consulta, o sistema toma como meta-objetos aqueles estocados na propriedade META-OBJETOS da base de conhecimento atual. Durante o processo de consulta, cada regra disparada é considerada e uma árvore histórica é montada simultaneamente [LEU88].

Ainda supondo a pergunta acima e a regra 01 exemplificada anteriormente, quando consultado, o sistema disparará esta regra, examinando as proposições antecedentes. Deste procedimento resulta a árvore da figura 6-16.

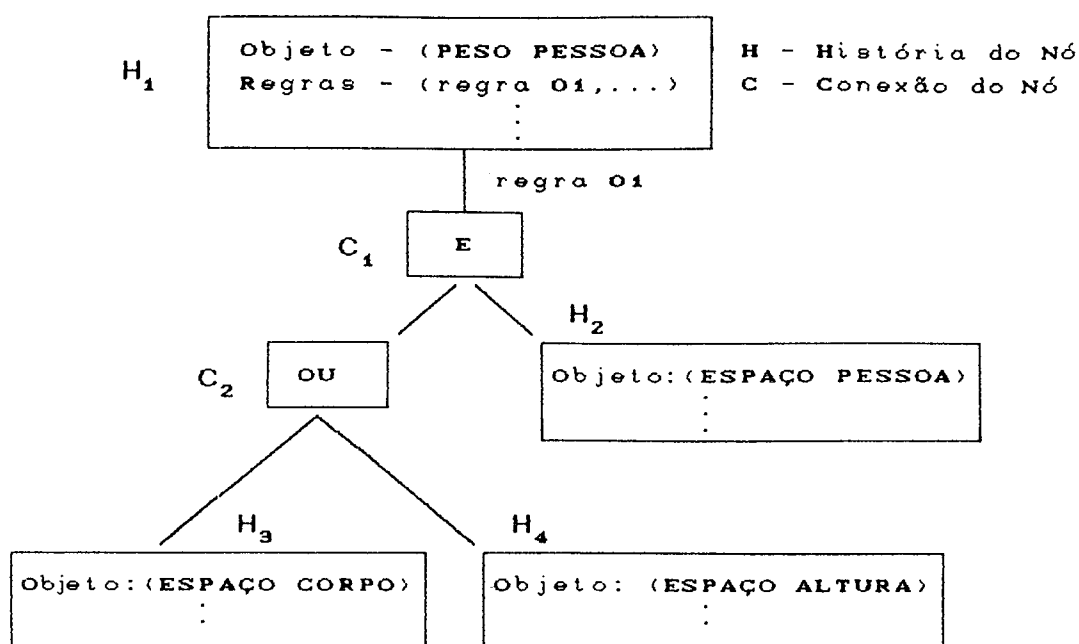


FIGURA 6-16 : Um Exemplo de uma Árvore Histórica - FONTE [LEU88]

Baseando-se na árvore histórica, o sistema inicia a inferência examinando um de seus objetos antecedentes (listados no *slot* PROPOSIÇÕES-ANTE). No exemplo, o primeiro da lista é (ESPAÇO CORPO), no nó **H<sub>3</sub>**. Se o *slot* LISTA-VALORES deste objeto estiver vazio, significa que ele é desconhecido, o que o torna um objeto sub-objetivo. A seguir, o sistema tenta obter o valor deste objeto ou perguntando ao usuário ou deduzindo de outras regras e fatos. O modo de dedução dependerá do que estiver no *slot* do objeto sub-objetivo PERGUNTA-PRIMEIRO-OU-NÃO. Quando o sistema decidir deduzir o valor de outras regras e fatos, ele continua a inferência a partir de **H<sub>3</sub>**, de maneira análoga. O sistema ignora as regras dos nós antecedentes, a fim de eliminar a possibilidade de *loopings* na construção da árvore de conhecimento [LEU88].

Quando obtiver o valor para o sub-objetivo, o sistema escolherá outro nó para ser sub-objetivo (i.e. **H<sub>2</sub>** ou **H<sub>4</sub>**), dependendo de dois fatores. Um relaciona-se às conjunções conectoras entre cada nó sub-objetivo. Os autores não especificam, no entanto, os detalhes deste paradigma. No caso em questão, o conectivo parece ser um bom paradigma de escolha, uma vez que pode evitar uma busca inútil. Por exemplo, se o objeto ESPAÇO CORPO não

for **BEM FORMADO**, não se provou ainda a primeira parte da regra 01 e deve-se optar por  $H_4$  (conectivo OU). Se o **ESPAÇO CORPO** for **BEM FORMADO**, provou-se a primeira parte da premissa, devendo-se ir para  $H_2$  (conectivo E).

O segundo fator é o fato de o valor do objeto no nó  $H_3$  ter sido ou não obtido. Por fim, esta regra será disparada quando toda sua parte antecedente tiver sido completamente satisfeita. Com isso, o valor do meta-objeto pode ser encontrado pela avaliação desta regra e do fato encontrado [LEU89].

As particularidades do processo de inferência do sistema Z-II que são relevantes neste trabalho surgem quando os objetos envolvidos são difusos, já que é neste caso que se aplica a Lógica Difusa. A incerteza difusa do meta-objeto é calculada a partir de incertezas difusas dos fatos e das regras, como detalhar-se-á posteriormente.

Outra questão que preocupa os construtores de sistemas especialistas é o caso de mais de uma regra chegar à mesma conclusão com diferentes valores difusos [BON85]. No sistema Z-II, o valor combinado para a conclusão é obtido pela intersecção entre os diferentes valores difusos obtidos de cada regra. Combina-se também as incertezas difusas para dar uma incerteza global ao valor combinado, como poder-se-á verificar posteriormente [LEU89].

As duas próximas seções merecem destaque nos trabalhos de Leung e Lam. Além de se entender efetivamente como o sistema Z-II atualiza as diversas formas de imprecisão de regras e fatos, pode-se encontrar nestes procedimentos uma alternativa de implementação de avaliações de imprecisões em sistemas especialistas. Isto é relevante quando o engenheiro de conhecimento não dispõe de uma ferramenta como o sistema Z-II e deve ele mesmo construir diretamente seu sistema especialista.

II) Avaliação das Regras com Proposições Simples

Inicialmente, Leung e Lam [LEU88] supõem uma regra contendo proposições simples tanto em sua parte antecedente como conseqüente. Para tal, os autores tomam a seguinte regra genérica:

Regra	:	SE A é $V_1$ ENTÃO C é $V_2$	(ND <sub>1</sub> )
Fato	:	A é $V_1'$	(ND <sub>2</sub> )
Conclusão	:	C é $V_2'$	(ND <sub>3</sub> )

onde :

A : objeto antecedente.  
 C : objeto conseqüente.  
 ND<sub>1</sub> : Número difuso denotando a incerteza da regra.  
 ND<sub>2</sub> : Número difuso denotando a incerteza do fato.  
 ND<sub>3</sub> : Número difuso denotando a incerteza da conclusão.  
 $V_1, V_2, V_1'$  e  $V_2'$  : valores.

O primeiro caso, excetuando-se o fato de as incertezas serem difusas, é o da situação mais comumente formalizada em sistemas especialistas, ou seja, quando o objeto A não é difuso (e.g. doença). Neste caso, para que a regra seja disparada,  $V_1$  e  $V_1'$  devem ser o mesmo símbolo atômico (e.g. nome da doença e não gravidade, agente transmissor, etc). Em conseqüência,  $V_2'$  na conclusão é idêntico a  $V_2$  e a incerteza associada, ND<sub>3</sub>, é obtida por [LEU88] :

$$(6-101) \quad ND_3 = ND_1 * ND_2$$

onde "\*" denota o produto extendido de números difusos, dada no início deste capítulo (item 6.2.3.c4).

Outra situação que pode ocorrer é o caso em que A é um objeto numérico não-difuso e há uma comparação difusa no antecedente da regra. Neste caso, obtém-se a conclusão como feito anteriormente, mas deve-se considerar o grau de cobertura d da comparação difusa na incerteza da conclusão, o que resulta na seguinte expressão para ND<sub>3</sub> [LEU89] :

$$(6-102) \quad ND_3 = ND_1 * ND_2 * d$$

Quando a comparação não for difusa, tem-se um caso especial de



comparação difusa e os procedimentos são idênticos [LEU89].

Quando os objetos  $A$  e  $C$  são difusos,  $V_1$  e  $V_2$  são representados pelos conjuntos difusos  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente. Leung e Lam [LEU88] formam uma relação difusa  $R$  entre estes conjuntos para realizar operações difusas sobre os mesmos. O sistema Z-II parte do método  $R_{so}$  para a formação desta relação difusa. Este método foi proposto por Mizumoto, Fukami e Tanaka [MIZ79] e, segundo Leung e Lam [LEU88], está próximo à intuição e raciocínio humanos. Se o usuário preferir outro método, no entanto, o sistema possui mais dois tipos de relação ( $R_s$  e  $R_g$ ) e pode, ainda, aceitar um método definido pelo próprio usuário. O métodos disponíveis no sistema Z-II são as relações  $R_s$ ,  $R_g$  e  $R_{sg}$  que estão descritos no item 6.2.4.

Além da difusão na regra, pode-se ter a difusão no fato, ou seja,  $V_1'$  poderia ser um valor difuso, representado pelo conjunto difuso  $F_1'$ . Neste caso, o conjunto difuso  $F_2'$  associado ao valor difuso  $V_2'$  na conclusão, seria obtido pela composição difusa (simbolizada por  $\circ$ ) entre o conjunto difuso  $F_1'$  e a relação difusa  $R$  (expressão 6-100), ou seja [LEU88] :

$$(6-103) \quad F_2' = F_1' \circ R$$

A incerteza difusa  $ND_s$  vale :  $ND_s = ND_1 * ND_2$ , como em (6-101).

Finalmente, outra situação possível surge quando o objeto  $A$  é difuso e o objeto  $C$  não é. Neste caso,  $V_2'$  na conclusão deve ser igual a  $V_2$ . A singularidade está agora na incerteza associada à conclusão que envolve um novo fator,  $m$ , denominado "similaridade" entre os conjuntos difusos  $F_1$  e  $F_1'$ . A incerteza associada à conclusão é obtida, neste caso, pela seguinte expressão:

$$(6-104) \quad ND_s = ND_1 * ND_2 * m$$

A similaridade  $m$  é obtida do algoritmo descrito nos itens 6.2.2.i e 6.2.2.j. No item 6.2.2.i comentou-se sobre

contração, duplicação e dilatação de conjunto difuso, diferenciadas pelo valor de  $Nec(F_1/F_1')$ . Na figura 6-17, a seguir, demonstra-se cada uma destas características de conjunto difuso.

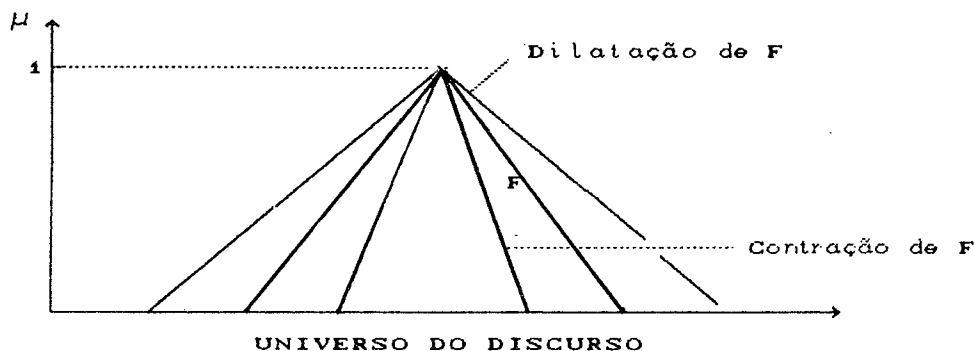


FIGURA 6-17 : Dilatação e Contração de um Conjunto Difuso  $F$  -  
FONTE [LEU88].

Como se pode ver na figura 6-17, quando  $F_1'$  é uma contração de  $F$ , sua distribuição é mais concentrada ou limitada. Leung e Lam [LEU88] supõem  $V_1$  e  $V_1'$  como sendo termos difusos na regra e no fato disponível, respectivamente. Neste caso,  $F_1$  e  $F_1'$  representam dois conceitos difusos similares (e.g. *alto* e *muito alto*). Uma distribuição mais concentrada de  $F_1'$  representa um termo mais fortemente expresso ou ressaltado que  $F_1$ . A dilatação é exatamente o oposto [LEU88].

A similaridade mede o quanto os dois conceitos difusos representados por dois conjuntos difusos são similares. Quando a necessidade é maior que 0.5 (i.e.  $F_1'$  é uma contração de  $F_1$ ), há uma saturação na similaridade e esta é forçada ser igual a possibilidade (geralmente igual a 1 para dois conceitos similares) [LEU88]. Leung e Lam [LEU88] ilustram esta situação em termos de regras com o seguinte exemplo :

#### Exemplo 6-30 [LEU88]

Regra (FC = 1.0) :

SE  $X$  é alto

ENTÃO  $X$  deveria ser escolhido membro do time de basquete

Fato (FC = 1.0) :

$X$  é muito alto.

Conclusão :  $X$  é escolhido como membro do time de basquete (FC =  $y$ )

Neste caso,  $F_1$  é o conjunto difuso "alto", enquanto  $F_1'$  é o conjunto difuso "muito alto". Considerando que as funções de pertinência destes conjuntos sejam aquelas representadas na figura 6-9, tem-se [LEU88] :

$Nec(F_1/F_1') = 0.6$  (  $> 0.5$ , indicando uma contração de  $F_1$ )  
 $Pos(F_1/F_1') = 1.0$

Segundo o algoritmo para calcular a "similaridade" tem-se :

$$m = P(F_1/F_1') = 1.0$$

o que leva a :

$$y = FC_1 * FC_2 * m = 1.0 * 1.0 * 1.0 = 1.0$$

Para o caso da dilatação (i.e.  $Nec < 0.5$ ), a similaridade depende tanto da Necessidade como da Possibilidade. Leung e Lam [LEU88] tomam como exemplo a mesma regra anterior, com o seguinte fato disponível :

Fato (FC = 1.0) :  
 X é pouco alto.

Neste caso,  $F_1'$  é o conjunto difuso "pouco alto", com sua função de pertinência sendo dada pela figura 6-9. Isto leva a:

$Nec(F_1/F_1') = 0.3$  (  $< 0.5$ , indicando uma dilatação de  $F_1$ )  
 $Pos(F_1/F_1') = 1.0$

Segundo o algoritmo para calcular a "similaridade" tem-se :

$$m = [Nec(F_1/F_1') + 0.5] * Poss(F_1/F_1') \\ = (0.3 + 0.5) * 1.0 = 0.8$$

o que leva a :

$$y = FC_1 * FC_2 * m = 1.0 * 1.0 * 0.8 = 0.8$$

### III) Avaliação das Regras com Múltiplas Proposições

Como afirmado anteriormente, o sistema Z-II admite apenas um tipo de conectivo unindo múltiplas proposições na parte conseqüente de uma regra, o conectivo E. Este tipo de regra pode ser considerado como múltiplas regras com conclusões individuais [LEU88]. Em outros termos, dada a regra :

SE proposições-antecedentes  
 ENTÃO  $C_1$  E  $C_2$  E ... E  $C_n$

é equivalente às seguintes regras :

SE proposições-antecedentes ENTÃO  $C_1$   
 SE proposições-antecedentes ENTÃO  $C_2$   
 ⋮  
 SE proposições-antecedentes ENTÃO  $C_n$

Com isto, o único problema que merece especial atenção em Z-II é o tipo de regra com múltiplas proposições em sua parte antecedente e uma única proposição em sua parte conseqüente. Quando o objeto na parte conseqüente não for difuso, não se faz nenhum tratamento especial em Z-II. Quando ele for difuso, no entanto, o sistema adota os algoritmos propostos por Mizumoto [MIZ85], a seguir relacionados [LEU88] :

#### Algoritmo I

Regra : Se  $A_1$  E  $A_2$  Então  $C$  é  $V_3$   
 Fatos :  $A_1'$ ,  $A_2'$   
 Conclusão :  $C$  é  $V_3'$

Obtém-se um conjunto difuso  $F_1$  da operação de composição entre a regra simples "Se  $A_1$  Então  $C$  é  $V_3$ " e o fato difuso  $A_1'$ . Analogamente, obtém-se um conjunto difuso  $F_2$  da operação de composição entre a regra simples "Se  $A_2$  Então  $C$  é  $V_3$ " e o fato difuso  $A_2'$ .

O conjunto difuso representando  $V_3'$  na conclusão  $C$  é obtido através da união difusa dos conjuntos difusos  $F_1$  e  $F_2$ .

Observação : Leung e Lam [LEU88] justificam a utilização da união difusa no fato de haver uma operação OU implícita na relação entre  $F_1$  e  $F_2$ , não aparente na regra  $[(A_1 \text{ E } A_2) \rightarrow C]$ . Pela propriedade distributiva da Lógica Clássica (capítulo II), esta regra pode ser reescrita:

$$[(A_1 \text{ E } A_2) \rightarrow C] \text{ equivale a } [(A_1 \rightarrow C) \text{ OU } (A_2 \rightarrow C)]$$

#### Algoritmo II

Regra : Se  $A_1$  OU  $A_2$  Então  $C$  é  $V_3$   
 Fatos :  $A_1'$ ,  $A_2'$   
 Conclusão :  $C$  é  $V_3'$

O algoritmo para este caso é o mesmo que o anterior, com a modificação da operação difusa sobre os conjuntos difusos  $F_1$  e  $F_2$ , ou seja, ao invés da união difusa, aplica-se a intersecção difusa entre estes dois conjuntos [LEU88].

Para estes dois algoritmos, tem-se que :

- $A_1$  e  $A_2$  proposições antecedentes (simples ou múltiplas).
- $A_1'$  e  $A_2'$  proposições dadas (fatos)
- $C$  objeto na proposição conseqüente da regra.
- $V_3$  e  $V_3'$  valores.

Estes algoritmos podem ser aplicados repetidas vezes quando os antecedentes das regras contiverem diversas combinações entre suas proposições. A seguir, apresenta-se um exemplo para este processo de inferência.

**Exemplo 6-31 [LEU88]**

**Regra :** SE (o custo da matéria-prima é baixo OU o custo de produção é baixo) E as vendas estão altas  
ENTÃO o lucro deve ser bom

**Fatos :** o custo da matéria-prima está muito baixo  
o custo de produção está baixo  
as vendas estão bem altas

onde : baixo, alta, bom e muito baixo são conceitos difusos.

**Resolução :**

- a) Inicialmente forma-se o conjunto difuso  $F_1$ , obtido da inferência (operação de composição) entre a

REGRA

SE o custo de matéria-prima está baixo  
ENTÃO o lucro deve ser bom

e o

FATO "o custo da matéria-prima está muito baixo".

- b) Analogamente, forma-se o conjunto difuso  $F_2$  através da inferência (operação de composição) entre a

REGRA

SE o custo de produção está baixo  
ENTÃO o lucro deve ser bom

e o

FATO "o custo de produção está baixo".

- c) Forma-se também o conjunto difuso  $F_3$  a partir da inferência (operação de composição) entre a

REGRA

SE as vendas estão altas  
ENTÃO o lucro deve ser bom

e o

FATO "as vendas estão bem altas".

- d) A seguir, pode-se obter o conjunto difuso  $F$  representando o valor difuso do objeto lucro na conclusão :

$F$  = união difusa entre  $F_{12}$  e  $F_3$ , onde  
 $F_{12}$  = intersecção difusa entre  $F_1$  e  $F_2$

Segundo Leung e Lam [LEU88], o resultado indicará o conceito difuso *bom* e obtém-se a conclusão "o lucro é bom".

Finalmente, no que diz respeito à manipulação de regras em Z-II, deve-se abordar o modo pelo qual o sistema calcula a incerteza associada à conclusão originada de múltiplas proposições na parte antecedente da regra. Segundo Leung e Lam [LEU88], o sistema Z-II faz esta atualização a partir das operações aritméticas de números difusos usadas no sistema MYCIN. Explicitamente :

Regra	:	Se $A_1$ E $A_2$ Então C	( $ND_R$ )
Fatos	:	$A_1'$	( $ND_1$ )
		$A_2'$	( $ND_2$ )
<hr/>			
Conclusão	:	$C'$	( $ND_C$ )

Obtém-se a incerteza da conclusão  $ND_C$  por :

$$(6-105) \quad ND_C = [\min\_nd (ND_1, ND_2) * ND_R]$$

onde :

$A_1, A_2$	são proposições antecedentes (simples ou múltiplas)
$A_1', A_2'$	proposições dadas (fatos)
C	proposição conseqüente
$C'$	conclusão
$ND_R$	incerteza difusa da regra
$ND_1$ e $ND_2$	incertezas difusas dos fatos
$ND_C$	incerteza difusa da conclusão
$\min\_nd$	mínimo entre dois números difusos
*	produto entre dois números difusos

Na regra anterior exemplificou-se o caso em que o operador lógico é a conjunção (E). Caso o operador lógico fosse a disjunção (OU), bastaria modificar a operação " $\min\_nd$ " pela operação " $\max\_nd$ " (i.e. máximo entre dois números difusos). Para qualquer combinação de proposições antecedentes estes dois cálculos podem ser aplicados repetidamente para tratar as incertezas difusas correspondentes às relações entre os fatos disponíveis e as regras [LEU88].

#### IV) Combinação de Evidências

Outra questão relevante no tratamento de imprecisão em sistemas especialistas é a combinação de evidências, ou seja, a

determinação do grau de incerteza final de uma conclusão que foi obtida por mais do que uma regra. O sistema Z-II determina este grau a partir de uma combinação dos graus com que a conclusão foi obtida em cada regra. Explicitamente [LEU88] :

*Regras*

$r_1$  : SE  $A_1$  Então  $C$

$r_2$  : SE  $A_2$  Então  $C$

*Fatos*

$A_1', A_2'$

---

*Conclusão*  $Cr$ , obtida de  $C'$  ( $ND_1$ ) e  $C''$  ( $ND_2$ )

onde

$r_1, r_2$  são os códigos das regras  
 $A_1, A_2$  são as proposições antecedentes  
 $C$  é a proposição conseqüente  
 $C', C''$  conclusões de  $r_1 \& A_1'$  e  $r_2 \& A_2'$ , respectivamente  
 $Cr$  conclusão Resultante (Final)  
 $ND_1, ND_2$  incertezas difusas da conclusão

Quando o objeto envolvido na proposição conseqüente é difuso, os conjuntos difusos que descrevem  $C'$  e  $C''$ , obtidos da inferência em Raciocínio Aproximado nas respectivas regras e fatos, são combinados na forma de intersecção entre estes conjuntos. O resultado será o conjunto difuso correspondente à conclusão combinada,  $Cr$ . Pode-se aplicar a operação repetidamente quando houver mais do que duas regras com a mesma proposição conseqüente [LEU88].

Quanto à combinação das incertezas difusas propriamente, a regra é similar à regra do sistema MYCIN. Agrega-se as incertezas par a par, a fim de se obter o fator final  $ND_R$  para a conclusão. A regra de combinação é a seguinte [LEU88] :

(6-106)

$$ND_R = ND_1 + ND_2 - (ND_1 * ND_2)$$

onde :

$ND_R$  é a incerteza difusa combinada  
 $ND_1$  e  $ND_2$  incertezas difusas de  $C'$  e  $C''$ , respectivamente  
 $+$  adição estendida de números difusos  
 $-$  subtração estendida de números difusos  
 $*$  produto estendido entre números difusos

### 6.5.3.b2. Módulo de Aproximação Lingüística

Na Rotina de Aproximação Lingüística, ocorre o processo de tradução dos conjuntos e números difusos em suas respectivas incertezas e termos difusos, agregadas às conclusões fornecidas ao usuário. O processo consiste em mapear o conjunto de conjuntos difusos em um conjunto de valores e expressões difusas. É desta forma que o sistema Z-II coloca suas conclusões ao usuário em linguagem natural. Isto ocorre em dois momentos distintos : primeiro, o sistema deve encontrar a correspondente descrição verbal para os conjuntos difusos que representam valores difusos; segundo, o sistema deve obter descrições lingüísticas dos números difusos que representam incertezas difusas associadas às regras, fatos e conclusões [LEU88].

#### I) Aproximação Lingüística dos Valores Lingüísticos

Segundo Leung e Lam [LEU88], o sistema Z-II utiliza duas técnicas na rotina de aproximação lingüística : a "imprecisão" e a "localização" de um conjunto difuso. Estas técnicas foram propostas por Wenstop [WEN80], segundo o qual "imprecisão" de um conjunto difuso é a soma de seus graus de pertinência (ou a área coberta pela distribuição de pertinência) e "localização" é o centro de gravidade. Segundo Wenstop [WEN80], pode-se identificar a distribuição de possibilidade de uma variável lingüística apenas a partir dos valores de "imprecisão" e "localização" de seu conjunto difuso, com o que se pode selecionar o valor lingüístico correspondente a determinada possibilidade.

#### II) Aproximação Lingüística das Incertezas Difusas

As incertezas difusas no sistema Z-II são representadas como números difusos trapezoidais, implementados como uma lista de números. Na aproximação lingüística traduz-se estes números difusos em expressões em linguagem natural, composta somente por termos lingüísticos. Para isso, o sistema utiliza novamente a "imprecisão" e a "localização" de um conjunto difuso. No sistema há uma tabela contendo a "imprecisão" e "localização" dos números difusos e um conjunto de termos lingüísticos escolhidos para cada



par (imprecisão, localização). O termo mais próximo ao par obtido para o conjunto difuso em questão definirá este termo como expressando a incerteza associada [LEU89].

Segundo Leung e Lam [LEU89], a tabela de aproximação lingüística é determinada com a ajuda de especialistas em Lingüística que julgam a "certeza" e a "imprecisão" de cada termo disponível no sistema Z-II. As conclusões apresentadas ao usuário podem possuir incertezas na forma mais precisa (e.g. "é muito certo (0.96) que a doença seja pneumonia") ou na forma de expressão em linguagem natural (e.g. "é quase certo (por volta de 0.8) que a doença seja pneumonia").

#### 6.5.3.b3. Módulo de Revisões

O Módulo de Tratamento de Revisões é o responsável pelo fornecimento da cadeia de raciocínio utilizada pelo sistema, quando o usuário solicitar e pelo gerenciamento de possíveis modificações nos dados fornecidos pelo usuário. Estas modificações podem ocorrer a qualquer momento da consulta, pois o sistema possui rotinas que revisam regras e fatos afetos às modificações [LEU88].

Outra tarefa importante deste módulo é fornecer ao usuário a cadeia de raciocínio utilizada para obter uma conclusão. O sistema fornece dois tipos de explicação : *porque* determinado fato está sendo pedido pelo sistema e *como* uma conclusão foi derivada [LEU88].

Por fim, o sistema Z-II permite certas simulações, quando o usuário solicita "O QUE SE", ou seja, ele descobre QUAIS conclusões seriam deduzidas SE certos fatos fossem modificados [LEU88].

## 6.6. TRATAMENTO DE INCERTEZA E SUBJETIVISMO EM UM SISTEMA DE APOIO À DECISÃO (SAD) PARA A ADMINISTRAÇÃO DO CAPITAL DE GIRO

Esta seção é uma transcrição do trabalho "*Treatment of Uncertainty and Subjectivism on a Working Capital Management Decision Support System (DSS)*" de Barcia et al. [BAR91a]. O objetivo consiste em ilustrar um promissor campo de aplicação da Teoria dos Conjuntos Difusos, mais especificamente na imprecisão presente na administração do Capital de Giro empresarial.

### 6.6.1. Introdução

Apesar de sua extrema importância, a Administração do Capital de Giro empresarial tem sido satisfatória somente em empresas que podem contar com experientes administradores. Pequenas e Médias Empresas (PMEs) têm enfrentado dificuldades de descapitalização ou imobilização excessivas por não efetuarem uma satisfatória gestão de seu capital circulante. Visando amenizar tais problemas, iniciou-se, em 1990, a construção de um Sistema Especialista em Administração de Capital de Giro (SECAGI), a fim de tornar o conhecimento requerido para esta tarefa acessível a várias empresas [SEC90].

Uma das particularidades observadas no conhecimento requerido na Administração do Capital de Giro é a consideração de conceitos qualitativos e subjetivos por parte do especialista. Assim, para que todos os aspectos relativos à Administração do Capital de Giro fossem considerados no sistema SECAGI, fez-se necessário tratar a imprecisão na forma de conceitos qualitativos e subjetivos. Esta tarefa foi executada seguindo-se alguns dos fundamentos do Raciocínio Aproximado da Teoria dos Conjuntos Difusos.

Nesta seção alguns dos principais aspectos relativos ao tratamento da imprecisão no sistema SECAGI são apresentados. Ao final, aborda-se um exemplo como o objetivo de ilustrar os procedimentos de propagação de imprecisão da Lógica Difusa utilizados no sistema.

### 6.6.2. Sistema SECAGI

O sistema SECAGI fornece um conjunto de ferramentas flexíveis de Apoio à Administração do Capital de Giro capazes de considerar, conjuntamente, regras intuitivas, conceitos qualitativos e informações incertas. Seu objetivo básico é minorar o efeito da ausência do especialista nas Pequenas e Médias Empresas.

Visando alcançar seu principal objetivo, o SECAGI incorpora o conhecimento de especialistas em Modelos (sub-sistemas dedicados a tarefas específicas). Estes permitem considerações econômicas na análise das decisões alternativas relacionadas à Administração do Capital de Giro.

A figura 6-18 esquematiza o funcionamento geral do sistema SECAGI [BAR91b]. As regras formalizadas nos Modelos podem conter incertezas que representam o julgamento do especialista sobre a validade destas regras. Além disso, os dados utilizados pelo sistema podem apresentar imprecisões de natureza qualitativa (quando fornecidos pelo usuário) ou probabilística (quando gerados por séries históricas). Para fornecer suas conclusões e análises ao usuário, o sistema deve tratar estas imprecisões e propagá-las até os resultados.

O tratamento da imprecisão no sistema SECAGI ocorre basicamente ao nível de seus Modelos. Nestes, está o conhecimento do especialista, formalizado em regras. Assim, o tratamento da imprecisão no SECAGI encontra-se associado a subsistemas especialistas que este possui para avaliar suas decisões.

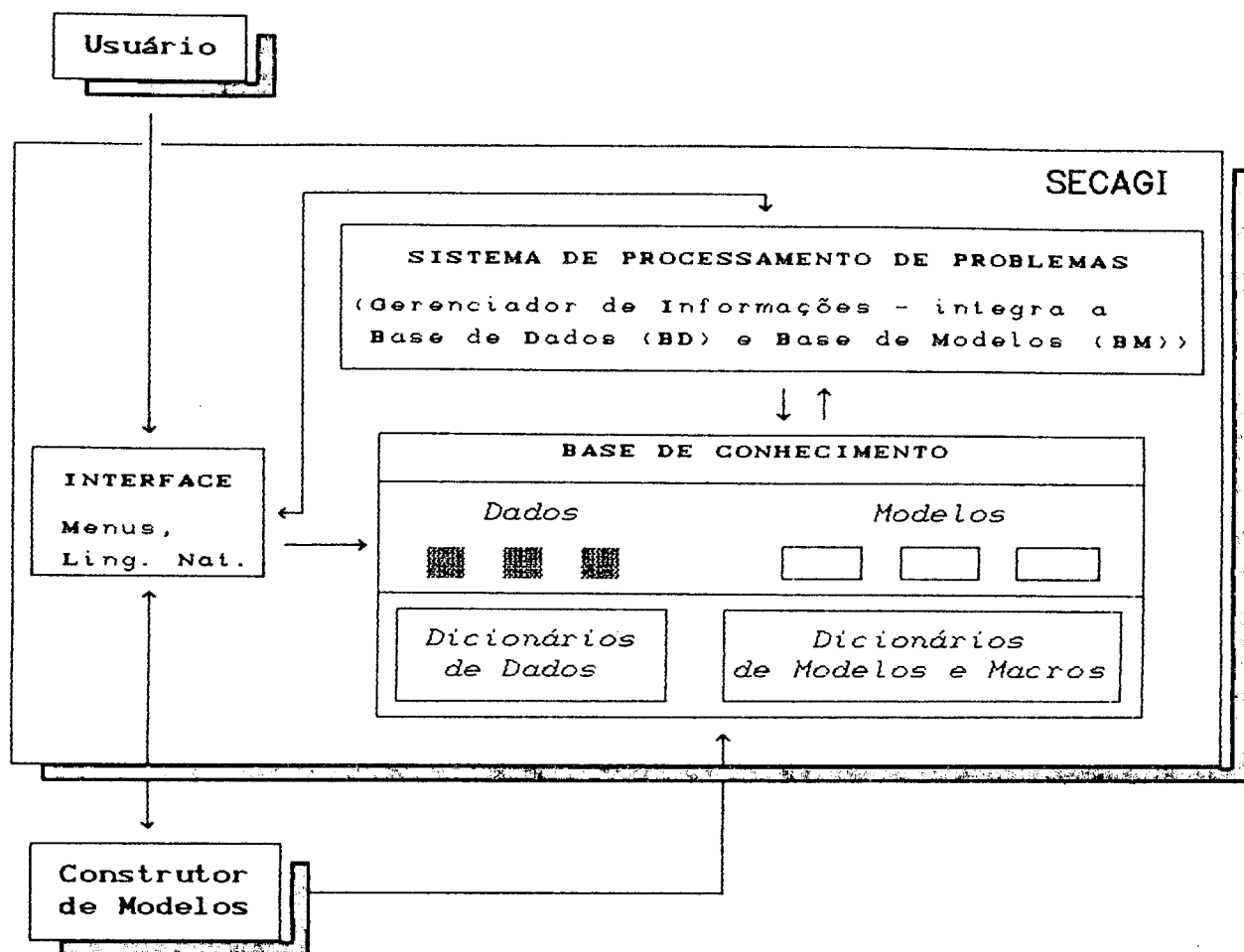


Figura 6-18 : Representação Esquemática do Funcionamento do Sistema SECAGI (BAR91b).

### 6.6.3. Tratamento de Imprecisão no Sistema SECAGI

O conhecimento qualitativo e subjetivo presente no sistema SECAGI foi modelado segundo os fundamentos da Lógica Difusa, através do *Modus Ponens Generalizado* ([ZAD83b]). O processo de implementação deste mecanismo de propagação de imprecisão pressupõe a construção de funções de pertinência que modelassem os conceitos qualitativos do especialista e a definição de operadores da Teoria dos Conjuntos Difusos cujos resultados na inferência parecessem mais plausíveis ao perito.

O processo de Administração do Capital de Giro apresenta uma série de decisões cujas informações caracterizam-se pelo subjetivismo na forma da quantificação qualitativa de parâmetros

ou da agregação destes parâmetros no momento da tomada de decisão. No sistema SECAGI, há uma série de situações de decisão onde os mecanismos de inferência seguem a Lógica Difusa. Neste trabalho, toma-se o "Módulo Difuso de Decisão Sobre a Forma de Pagamento", a fim de ilustrar um dos mecanismos adotados.

#### 6.6.3.a. Módulo Difuso de Decisão Sobre a Forma de Pagamento

Ilustrativamente, toma-se como exemplo a decisão sobre a forma do pagamento a um fornecedor, quando da compra dos itens do estoque, considerando uma situação de compra para produção imediata (e não "especulação" em estoque, analisada por outro Modelo do Sistema).

Considera-se que o fornecedor oferece duas formas de pagamento :

- a) À vista com  $d\%$  de desconto ou
- b) Em  $n$  dias com valor  $P$

Antes de se abordar o Módulo Difuso de Decisão, deve-se conhecer explicitamente os parâmetros que este utiliza para decidir. Tais parâmetros são os seguintes :

##### a) *Liquidez da Empresa*

Resumidamente, a *Liquidez* mede a capacidade da empresa cumprir seus compromissos de curto prazo. Embora haja outras maneiras de se medir a *Liquidez*, quando o interesse é parametrizar a decisão sobre a forma de pagamento, o especialista utiliza simplesmente o *Caixa Mínimo* nos  $1.3n$  dias após o dia do acerto com o fornecedor. Isto significa que o perito, na análise da liquidez como balisamento da decisão sobre a forma de pagamento, julga suficiente tomar-se 30% dos dias após o prazo dado pelo fornecedor. O valor do Caixa Mínimo é dado por :

$$(6-107) \quad Cx.Min.(dia \ i) = \sum_i E_i - S_i, \text{ para } i = 1 \text{ a } 1.3n$$

onde :  $i$  = dia considerado ( $i = 1$  é o dia do acerto e  $i = n$  é o dia previsto para o pagamento a prazo).

A fim de tornar este parâmetro independente do contexto, deve-se tomar uma medida não-monetária. O especialista qualificou a Liquidez tomando o Caixa Mínimo na unidade de Dias de Vendas, o que é obtido por :

$$(6-108) \quad \text{Liq.} = \frac{\text{Caixa Mínimo}}{\text{Venda Média Mensal}} \cdot 30$$

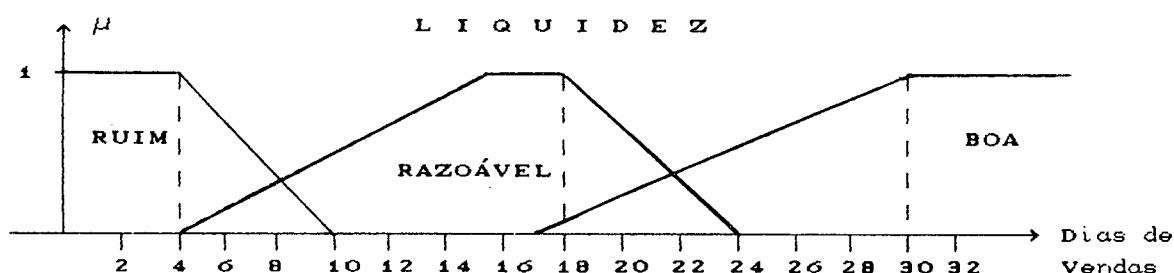


Figura 6-19: Conjuntos Difusos que Descrevem a Liquidez

As qualificações utilizadas pelo especialista, "Liquidez Baixa", "Liquidez Razoável" e "Liquidez Alta" definiram três conjuntos difusos, formados a partir das qualificações dadas a valores especificados do caixa mínimo na unidade de dias de vendas. A figura 6-19 ilustra estes conjuntos.

#### b) Benefício Real nas Compras à Vista e a Prazo

Este valor é determinado considerando-se a relação entre o Benefício da opção de compra com o Custo Real do Capital da Empresa.

O primeiro passo consiste em verificar a relação Custo/Benefício de cada opção de compra. Isto se dá a partir de uma comparação entre o desconto  $d$  oferecido e a inflação esperada  $i$  no período de  $n$  dias. No sistema SECAGI, esta inflação (colocada em termos mensais) pode ser fornecida explicitamente pelo usuário (ex. 20%), fornecida qualitativamente (ex. "A inflação será muito alta") ou, caso o usuário não tenha qualquer idéia a respeito, projetada probabilisticamente a partir de uma série histórica contida no sistema. Esta comparação fornece o parâmetro  $C_b$ , Custo/Benefício Real, para cada alternativa (compra à vista e a prazo), dado por :

(6-109)

$$C_b = \frac{1}{(1-d) \cdot (1+i)^{n/30}} - 1$$

Em princípio, quando  $C_b$  for negativo, há um benefício real na compra a prazo e quando  $C_b$  for positivo, o benefício real ocorre na compra à vista.

Para se determinar o Benefício Real em termos da avaliação do especialista, verifica-se a relação entre o Custo/Benefício da Opção e o Custo do Capital ou, segundo Gitman [GIT87], *Custo de Oportunidade da Empresa*. Segundo Baumol e Blinder [BAU85], o valor do Custo de Oportunidade de uma alternativa é o valor da alternativa mais próxima que se deve deixar de lado devido à limitação de recursos (sejam estes tempo, dinheiro, espaço, etc). Este custo é utilizado indistintamente com o nome de *Custo de Capital*. Resta agora medir o Custo de Oportunidade em cada uma das alternativas de compra.

O Custo de Oportunidade depende da situação de liquidez da empresa (não considerando ainda qualquer decisão sobre a forma de compra). O sistema verifica esta liquidez segundo os critérios anteriores e, dependendo da situação, adota um determinado parâmetro específico para avaliar o Custo de Oportunidade.

Quando a liquidez estiver "boa", a alternativa mais palusível é a "Compra à Vista" (por não haver problema de caixa). Seu custo de oportunidade pode ser avaliado pelo custo de se abandonar a alternativa da compra a prazo. Este, por sua vez, é o rendimento que os títulos de curto prazo poderiam dar ao dinheiro pago à vista no prazo de pagamento oferecido.

Quando a liquidez estiver "ruim", a opção mais plausível é a "Compra a Prazo" (intuitivamente o especialista opta por não comprometer imediatamente a liquidez, preferindo a possibilidade de se adiar o pagamento no prazo determinado). Seu Custo de Oportunidade é medido pelo custo do abandono da alternativa ao pagamento à vista. Com a liquidez "ruim", a alternativa da compra à vista faria com que um empréstimo fosse necessário e as taxas praticadas no mercado assumem, neste caso, o valor do custo de

oportunidade.

No caso de uma liquidez "razoável" e marginalmente "boa" (com grau de pertinência no conjunto "Liquidez Boa" maior do que zero), o sistema adota a mesma decisão da situação de liquidez "boa". No caso de uma liquidez razoável e marginalmente "ruim", o sistema adota a mesma decisão da situação de liquidez "ruim". Isto também é feito no caso de uma liquidez "razoável" sem pertinência marginal nos demais conjuntos, adotando-se, neste caso, uma estratégia pessimista.

De posse do valor do Custo de Oportunidade e da origem de seu cálculo, o sistema calcula a relação Benefício Real/Custo de Capital. O especialista qualificou os diferentes valores de relação segundo cada situação (Custo de Capital medido a partir do rendimento dos títulos de curto prazo ou das taxas de empréstimos). A classificação é análoga à qualificação da Liquidez e está formalizada nos conjuntos difusos representados nas figuras 6-20 e 6-21 a seguir.

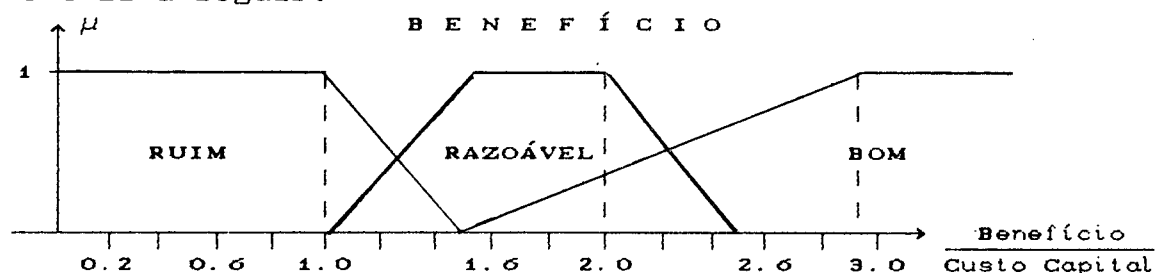


Figura 6-20 : Conjuntos Difusos que Descrevem o Benefício no caso do Custo de Capital ser medido a partir das taxas de empréstimo.

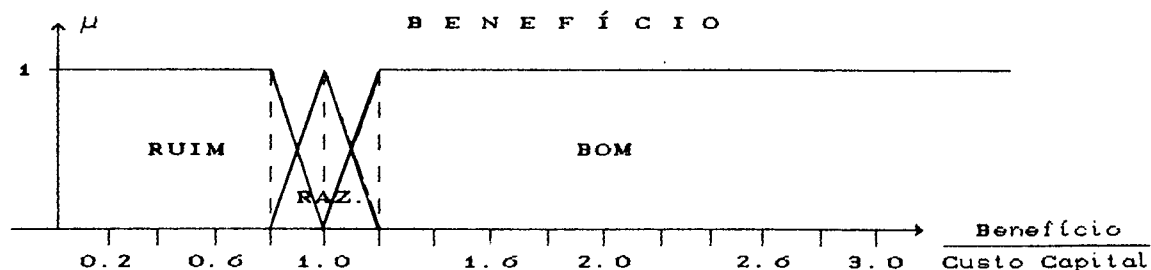


Figura 6-21 : Conjuntos Difusos que Descrevem o Benefício no caso do Custo de Capital ser medido a partir dos rendimentos dos fundos de curto prazo nos n dias.



A figura 6-20 formaliza a maior exigência do especialista na relação Benefício/Custo do Capital, já que esta opção tem seu custo avaliado a partir de empréstimos junto a terceiros. A figura 6-21 representa uma menor exigência do especialista na qualificação da relação Benefício/Custo do Capital, já que agora o Custo é relativo à ausência de rendimentos e não a desembolsos, como anteriormente.

A relação obtida em uma determinada análise do sistema terá pertinências marginais em cada um dos conjuntos difusos que descrevem o Benefício da opção de compra. Estes valores serão obtidos dos gráficos na figura 6-20 ou nos gráficos da figura 6-21, dependendo da forma com que se está avaliando o Custo de Oportunidade.

*c) A Relação entre a Liquidez e o Benefício da Opção de Compra*

As diferentes relações entre os parâmetros "Benefício Real" e "Liquidez", explicitadas pelo especialista, foram formalizadas em regras como as colocadas a seguir.

SE Para a Opção OPC

a Liquidez estiver MUITO BOA E o Benefício Real for MUITO BOM,  
com certeza  $FC(R_1)$

OU a Liquidez estiver MUITO BOA E o Benefício Real for BOM,  
com certeza  $FC(R_2)$ , OU .....

ENTÃO

OPC é a Opção de Compra, com Certeza  $FC(\text{CONCLUSÃO})$

As regras formalizadas no sistema e os respectivos fatores de certeza estão relacionados na figura 6-22, a seguir.

PREMISSAS		PESO DA REGRA	PREMISSAS		PESO DA REGRA
Liquidez	Benefício		Liquidez	Benefício	
MUITO BOA	MUITO BOM	1.00	BOA	RAZOÁVEL	0.70
MUITO BOA	BOM	0.90	RAZOÁVEL	MUITO BOM	0.70
MUITO BOA	RAZOÁVEL	0.80	RAZOÁVEL	BOM	0.65
MUITO BOA	RUIM	0.60	RUIM	MUITO BOM	0.50
BOA	MUITO BOM	0.86	RAZOÁVEL	RAZOÁVEL	0.60
RUIM	RAZOÁVEL	0.15	RAZOÁVEL	RUIM	0.38
BOA	RUIM	0.44	RUIM	RUIM	0.10
BOA	BOM	0.80	RUIM	BOM	0.17

Figura 6-22 : Regras e respectivos Fatores de Certeza no Módulo Difuso de Decisão Sobre a Forma de Pagamento.

Nas regras explicitadas no quadro da figura 6-22, verifica-se a presença do modificador "Muito", aplicado aos conjuntos difusos "Liquidez Boa" e "Benefício Real Bom". Este e outros modificadores (e.g. "quase", "pouco", "aproximadamente") são modelados na Teoria dos Conjuntos Difusos através da utilização de funções aplicadas à função de pertinência do conjunto. No caso de "muito", por exemplo, aplica-se o operador "quadrado" à função de pertinência (eleva-se seus graus ao quadrado) para se obter o conjunto difuso modificado [LEU88].

As regras apresentadas pelo especialista identificam sua aversão ao risco, uma vez que ele dá bem mais importância à Liquidez do que ao Benefício. Contudo, o especialista enfatizou que a importância relativa entre os parâmetros "Liquidez" e "Benefício Real" na decisão sobre a forma de pagamento é também dependente do perfil do decisor. Se o decisor é adepto ao risco, a relevância do parâmetro "Benefício Real" é maior que a do parâmetro "Liquidez". No sistema SECAGI, tem-se estudado formas ([MAY91]) de se considerar este aspecto tomando as importâncias relativas entre Liquidez e Benefício, atribuídas pelo decisor. Estas importâncias relativas podem ser tomadas a partir do Módulo de Introdução de Informações Específicas da Empresa, onde há perguntas relacionadas a este ponto que podem identificar os graus mais adequados ao decisor.

#### 6.6.3.b. Avaliação das Regras

A seguir apresenta-se a forma genérica das regras no Módulo Difuso de Decisão sobre a Forma de Pagamento e o mecanismo de inferência que o sistema SECAGI adota neste Módulo.

<b>REGRA R :</b>	SE	para OPC	
		Lop = Tipo de Liquidez	(c/ Importância $I_l$ )
	E	Bop = Tipo de Benefício	(c/ Importância $I_b$ ),
	ENTÃO	Opção = OPC	(c/ Certeza $FC(R)$ ).
<b>FATOS :</b>		Lop = Tipo de Liquidez	(c/ grau $\mu_L(Lop)$ )
		Bop = Tipo de Benefício	(c/ grau $\mu_B(Bop)$ )
<hr/>			
<b>CONCLUSÃO :</b>	Opção = OPC		(c/ Certeza $FC(Opç,R)$ )

onde :

- $Lop$  e  $Bop$  são, respectivamente, Liquidez e Benefício da Opção.
- $I_l$  e  $I_b$  são as importâncias dos parâmetros de decisão "Liquidez" e "Benefício Real", respectivamente. Estes parâmetros são normalizados no sistema ( $I_l + I_b = 1$ ).
- $\mu_L(Lop)$  e  $\mu_B(Bop)$  são os graus da opção OPC nos conjuntos difusos que definem o Tipo de Liquidez e o Tipo de Benefício da Regra, respectivamente.
- $FC(R)$  e  $FC_{opc,R}$  são, respectivamente, os fatores de certeza da Regra (atribuído pelo especialista) e da Conclusão em relação à regra R (obtido da inferência).
- $G_S(R)$  é o Grau de Satisfação da Regra R, ou seja, o quanto OPC satisfaz as restrições da regra.

O parâmetro  $G_S(R)$  para cada regra R é obtido considerando-se dois fatores : a intersecção difusa entre os Conjuntos Difusos que representam a Liquidez ( $\mu_L(Lop)$ ) e o Benefício ( $\mu_B(Bop)$ ) e a importância de cada parâmetro na decisão. No sistema SECAGI, a ponderação adotada define a seguinte expressão para a obtenção do Grau de Satisfação da Regra [MAY91] :

$$(G-110) \quad G_S(R) = \begin{cases} \mu_1 & \text{se } I_1 \geq 0.5 \\ \mu_2 - 2 \cdot I_1 \cdot (\mu_2 - \mu_1) & \text{se } I_1 < 0.5 \\ \text{onde : } \mu_1 \leq \mu_2 \text{ e } I_1 + I_2 = 1. \end{cases}$$

Assim, na regra descrita anteriormente tem-se :

$$\begin{aligned} &\text{se } \mu_L(Lop) \leq \mu_B(Bop) : \\ &\quad \mu_1 = \mu_L(Lop), \mu_2 = \mu_B(Bop), I_1 = I_l \text{ e } I_2 = I_b. \\ &\text{se } \mu_L(Bop) < \mu_B(Lop) : \\ &\quad \mu_1 = \mu_L(Bop), \mu_2 = \mu_B(Lop), I_1 = I_b \text{ e } I_2 = I_l. \end{aligned}$$

Esta expressão foi obtida considerando que, quando as importâncias  $I_1$  e  $I_2$  são iguais (0.5 cada), tem-se o caso clássico, onde se toma o mínimo entre os graus de pertinência como sendo o grau de satisfação da regra. Quando a importância do menor grau de pertinência ( $\mu_1$ ) for maior ou igual a do outro ( $\mu_2$ ), também ocorre o caso clássico. Quando a importância do maior grau é maior, este deve pesar proporcionalmente no cálculo do grau de satisfação da regra [MAY91].

O Fator de Certeza associado à conclusão é obtido da agregação do Fator associado à Regra e do grau de satisfação

$G_S(R)$ , da seguinte forma :

$$(6-111) \quad FC(Opc, R) = G_S(R) \cdot FC(R)$$

#### 6.6.3.c. Avaliação das Evidências

O grau com que a opção OPC satisfaz a forma de pagamento escolhida pelo especialista é obtido considerando-se o modo pelo qual a opção OPC satisfaz o conjunto de regras proposto pelo especialista, ponderado com o perfil do decisor (avaliado pelas importâncias relativas entre os parâmetros de decisão).

Como se nota na figura 6-22, as conjunções "OU" na regra formulada pelo especialista geraram 16 regras. Em todas estas, a proposição na parte conseqüente é um objeto não-difuso (forma de pagamento). Assim, a imprecisão na decisão está caracterizada pela agregação das imprecisões em cada regra verificada para cada opção. Esta agregação segue uma regra similar à regra de agregação do sistema MYCIN [BUC84]. Nesta, agrega-se as incertezas par a par, a fim de se obter o fator final  $INC(Opc)$  para a conclusão. Para cada par de regras, a expressão é a seguinte :

$$(6-112) \quad INC(R_i) = G_S(R_i) + G_S(R_j) - (G_S(R_i) * G_S(R_j))$$

A incerteza final na opção de compra,  $INC(Opc)$ , será a obtida entre o grau da última regra ( $INC(16)$ ) e o grau agregado entre a penúltima e ante-penúltima regras ( $INC(R_{14,15})$ ).

A resposta que o sistema SECAGI fornece informa ao decisor este grau para cada alternativa, podendo explicitar ainda qual o ponto frágil da opção OPC (se Liquidez ou Benefício), a fim de que o decisor possa avaliar outras possibilidades (empréstimos para resolver o problema da liquidez ou renegociação do desconto, no caso de baixo Benefício).

#### 6.6.4. Aplicação

Ilustrativamente, propõe-se uma situação de decisão sobre a melhor forma de pagamento na seguinte proposta : 357 unidades monetárias à vista ou 411 u.m. em 40 dias. Ao solicitar uma opinião do sistema, o usuário será questionado sobre a inflação prevista em termos mensais. Supondo-se que sua resposta seja 6%, o sistema iniciará seu processo de inferência calculando o desconto fornecido através da seguinte expressão :

Desconto Nominal :

$$d = 1 - \text{Preço à Vista/Preço a Prazo} = 1 - 357/411 = 0.131 \\ = 13,1\%$$

A seguir, o sistema utiliza a expressão (6-109) para obter o Custo/Benefício das opções "à vista" e "a prazo".

Custo/Benefício :

$$C_b = \frac{1}{(1 - 0.13) \cdot (1 + 0.06)^{40/30}} - 1 = 6,35\%$$

Pode-se interpretar este resultado como sendo o Custo/Benefício proposto pelo fornecedor, descontada a inflação. O resultado acima, a princípio, indica uma possível vantagem da compra à vista, segundo o critério do Benefício.

A seguir o sistema determina a relação  $C_b$ /Custo do Capital. O Custo do Capital da empresa é avaliado ou pelas taxas de juros de empréstimos junto a terceiros ou pelas taxas aplicadas nos títulos de curto prazo. Para se saber qual é o parâmetro a ser adotado, deve-se conhecer a situação da liquidez da empresa no momento da proposta. Para tal, o sistema verifica as entradas e saídas de caixa previstas no período de 1.3<sup>ra</sup> dias. Supondo que a liquidez calculada segundo as expressões (6-107) e (6-108) seja de 6 dias de vendas, os graus de pertinências nos conjuntos difusos que descrevem a liquidez (figura 6-19) são :

$$\begin{array}{ll} \mu_{\text{RUIM}}(6) = 0.67 & \mu_{\text{RAZOÁVEL}}(6) = 0.18 \\ \mu_{\text{BOA}}(6) = 0.00 & \mu_{\text{MUITO BOA}}(6) = 0.00 \end{array}$$

Neste caso, a liquidez é mais "ruim" do que "razoável", indicando a tendência da alternativa da compra a prazo. Com isso, o Custo de Oportunidade passa a ser medido pelas taxas de empréstimo praticadas no mercado. O sistema, então, solicita ao decisor as taxas de empréstimo. Supondo que a taxa seja de 9% ao mês (valor nominal), o sistema transforma esta taxa em termos reais ( $1.09/1.06 - 1 = 2.8\%$ ). O gráfico a ser utilizado nas análises do Benefício de cada alternativa é dado, então, pela figura 6-20.

Neste momento o sistema está apto a verificar a Liquidez e o Benefício de cada opção de pagamento.

- *Benefício*

Inicialmente verifica-se a relação Benefício  $C_b$ /Custo de Capital e seus valores de pertinência nos conjuntos difusos que definem o Benefício Real em cada alternativa (figura 6-20).

a) Na Compra à Vista :

$$\text{Ben/Custo} = 6.35/2.8 = 2.27$$

$$\begin{array}{ll} \mu_{\text{RUIM}}(2.27) = 0.00 & \mu_{\text{RAZOÁVEL}}(2.27) = 0.46 \\ \mu_{\text{BOM}}(2.27) = 0.51 & \mu_{\text{MUITO BOM}}(2.27) = 0.26 \end{array}$$

b) Na Compra a Prazo :

$$\text{Ben/Custo} = -6.35/2.8 = -2.27$$

$$\begin{array}{ll} \mu_{\text{RUIM}}(-2.27) = 1.0 & \mu_{\text{RAZOÁVEL}}(-2.27) = 0.0 \\ \mu_{\text{BOM}}(-2.27) = 0.0 & \mu_{\text{MUITO BOM}}(-2.27) = 0.0 \end{array}$$

Estes serão os graus com que cada alternativa de pagamento cobrirá a segunda parte de cada regra.

#### - Liquidez

A seguir, utilizando-se das expressões (6-107) e (6-108), o sistema verifica a liquidez de cada alternativa de pagamento. Para tal, calcula-se a soma das diferenças entre as entradas e as saídas no caixa de cada um dos próximos 52 dias (1.3\*40 dias). Para cada alternativa, toma-se o menor destes valores, transformando-o em dias de vendas e verificando os graus de pertinência deste valor em cada um dos conjuntos difusos que qualificam a liquidez, segundo o especialista, representados na figura 6-19. A seguir estão os caixas mínimos supostos de cada alternativa e os respectivos graus de pertinência.

a) Para a Compra à Vista : 4.5 dias de Vendas

$$\begin{array}{ll} \mu_{\text{RUIM}}(4.5) = 0.92 & \mu_{\text{RAZOÁVEL}}(4.5) = 0.04 \\ \mu_{\text{BOA}}(4.5) = 0.00 & \mu_{\text{MUITO BOA}}(4.5) = 0.00 \end{array}$$

b) Para a Compra a Prazo : 6 dias de Vendas

$$\begin{array}{ll} \mu_{\text{RUIM}}(6) = 0.67 & \mu_{\text{RAZOÁVEL}}(6) = 0.18 \\ \mu_{\text{BOM}}(6) = 0.00 & \mu_{\text{MUITO BOM}}(6) = 0.00 \end{array}$$

Além dos graus com que cada alternativa cobre as premissas das regras, deve-se considerar a importância que o decisor dá para cada um dos parâmetros Benefício e Liquidez. Supõe-se que ele forneça, em uma escala de 0 a 1, os valores 0.5 e 0.8 para as importâncias do Benefício (I<sub>b</sub>) e da Liquidez (I<sub>l</sub>), respectivamente. Quando normalizados, estes valores tornam-se 0.38 para I<sub>b</sub> e 0.62 para I<sub>l</sub>. Pode-se, agora, verificar a inferência nas regras formalizadas no sistema para cada uma das alternativas. As tabelas nas figuras 6-23 e 6-24, a seguir, sintetizam os resultados obtidos no exemplo.

Alternativa : Compra à Vista						
PREMISSA		PERTINÊNCIAS		CONCLUSÃO	INCERT.	INCERT.
Liquidez	Benefício	$\mu_L$	$\mu_B$	$G_S(R)$	REGRA	ACUMUL.
$I_L = 0.62$	$I_B = 0.38$				$FC(R)$	
MUITO BOA	MUITO BOM	0.00	0.26	0.0000	1.00	0.000
MUITO BOA	BOM	0.00	0.51	0.0000	0.90	0.000
MUITO BOA	RAZOÁVEL	0.00	0.46	0.0000	0.80	0.000
BOA	MUITO BOM	0.00	0.26	0.0000	0.86	0.000
BOA	BOM	0.00	0.51	0.0000	0.80	0.000
BOA	RAZOÁVEL	0.00	0.46	0.0000	0.70	0.000
RAZOÁVEL	MUITO BOM	0.04	0.26	0.0400	0.70	0.028
RAZOÁVEL	BOM	0.04	0.51	0.0400	0.65	0.053
RAZOÁVEL	RAZOÁVEL	0.04	0.46	0.0400	0.60	0.076
RAZOÁVEL	RUIM	0.04	0.00	0.0400	0.38	0.090
RUIM	MUITO BOM	0.92	0.26	0.4184	0.50	0.280
RUIM	BOM	0.92	0.51	0.6084	0.17	0.350
RUIM	RAZOÁVEL	0.92	0.46	0.5704	0.15	0.410
RUIM	RUIM	0.92	0.00	0.2208	0.10	0.420
INC(a Vista) =						0.420

Figura 6-23 : Resultados da Inferência do Sistema para a opção "Compra à Vista".

Alternativa : Compra a Prazo						
PREMISSA		PERTINÊNCIAS		CONCLUSÃO	INCERT.	INCERT.
Liquidez	Benefício	$\mu_L$	$\mu_B$	$G_S(R)$	REGRA	ACUMUL.
$I_L = 0.62$	$I_B = 0.38$				$FC(R)$	
MUITO BOA	RUIM	0.00	1.00	0.0000	0.60	0.000
BOA	RUIM	0.00	1.00	0.0000	0.44	0.000
RAZOÁVEL	MUITO BOM	0.18	0.00	0.0432	0.70	0.030
RAZOÁVEL	BOM	0.18	0.00	0.0432	0.65	0.067
RAZOÁVEL	RAZOÁVEL	0.18	0.00	0.0432	0.60	0.082
RAZOÁVEL	RUIM	0.18	1.00	0.1800	0.38	0.144
RUIM	MUITO BOM	0.67	0.00	0.1608	0.50	0.212
RUIM	BOM	0.67	0.00	0.1608	0.17	0.234
RUIM	RAZOÁVEL	0.67	0.00	0.1608	0.15	0.252
RUIM	RUIM	0.67	1.00	0.6700	0.10	0.302
INC(a Prazo) =						0.302

Figura 6-24 : Resultados da Inferência do Sistema para a opção "Compra a Prazo".

Resposta do Sistema :

"Em caso de se dever optar, a alternativa mais adequada é a Compra à Vista. Segundo o seu perfil de decisão e o do especialista tem-se :

Opção de Compra	Benefício	Liquidez
Compra à Vista	"Bom" (0.51)	"Ruim" (0.92)
Compra a Prazo	"Ruim" (0.67)	"Ruim" (1.00)

Você terá maiores problemas de Liquidez com a Compra a Prazo e o Benefício é menor. Na Compra à Vista, há problemas de Liquidez e é possível que haja empréstimo."

#### 6.6.5. Conclusões e Perspectivas

A implementação do tratamento de imprecisão no sistema SECAGI segue os principais fundamentos da Lógica Difusa. A novidade encontra-se no fato de se considerar também o perfil do decisor, além do perfil do especialista, modelado nas regras do sistema. A decisão final do sistema considera, portanto, o fato de o decisor, na maioria das vezes, possuir características decisórias diferenciadas do especialista (maior ou menor aversão a riscos, por exemplo).

Apesar de ter-se mostrado razoável em aplicações-testes, trabalhos estão sendo desenvolvidos no sentido de se melhorar a performance do sistema e de se aumentar a quantidade de Módulos implementados. Nestes esforços, acredita-se que características específicas à Administração do Capital de Giro identifiquem novas necessidades de tratamento de imprecisão nas informações e no conhecimento especializado.

No que se refere à forma de apresentação das conclusões do sistema, tem-se desenvolvido estudos em Interfaces em Linguagem Natural, com o objetivo qualificar os resultados em termos linguísticos sem a necessidade de se atribuir graus como se viu no exemplo apresentado. Esta metodologia pode ser semelhante àquela presente no sistema Z-II de Leung e Lam [LEU89].



## CAPÍTULO VII

### ANÁLISE COMPARATIVA, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 7.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma análise comparativa entre as quatro abordagens tratadas nos capítulos anteriores. O objetivo consiste em identificar as vantagens e desvantagens de cada abordagem em relação às demais.

Além disso, retoma-se os estudos de Bonissone [BON87] onde o autor apresenta vários requerimentos necessários a uma técnica *ideal* para o Tratamento de Imprecisão em S.E. e verifica-se se cada uma das quatro técnicas estudadas cumpre cada um dos requisitos.

Finalmente, as principais conclusões e recomendações relativas ao trabalho são discutidas.

#### 7.2. COMPARAÇÕES ENTRE OS QUATRO CÁLCULOS

##### 7.2.1. Sobre a Medida de Imprecisão

O primeiro parâmetro de comparação entre as abordagens estudadas é a medida de imprecisão que cada técnica utiliza. O quadro na figura 7-1 sintetiza esta comparação.

Abordagem	Medida	Tipo e Ranking
<i>Cálculo Bayesiano</i>	Probabilidade	Numérica [0,1]
<i>Fatores de Certeza</i>	Grau de Crença	Numérica [-1,1]
<i>Teoria da Evidência</i>	Grau de Confirmação	Numérica [0,1]
<i>Teoria dos Conjuntos Difusos</i>	Grau de Pertinência	Numérica [0,1]

FIGURA 7-1 : Medida de Imprecisão em Cada Técnica

## 7.2.2. Sobre a Aquisição das Medidas de Imprecisão

Abordagem	Tipo da Aquisição	Momento Aquis.
<i>Cálculo Bayesiano</i>	Objetiva/Subjetiva	Antecipadamente
<i>Fatores de Certeza</i>	Subjetiva	Quando necess.
<i>Teoria da Evidência</i>	Subjetiva	Quando necess.
<i>Teoria dos Conjuntos Difusos</i>	Subjetiva	Quando necess.

FIGURA 7-2 : Aquisição das Medidas em Cada Técnica

Os valores de imprecisão presentes no sistema podem ser originários de uma análise formal (i.e. valores objetivos) ou de estimativas feitas por um especialista (i.e. avaliações subjetivas).

No caso Bayesiano, os valores podem ser adquiridos por meio de análise estatística (e.g. análise freqüencial). Neste caso, dado um espaço amostral suficientemente grande, todos observadores atribuiriam essencialmente o mesmo valor de incerteza para uma evidência parcial, ou seja, tem-se valores objetivos. Além disso, pode-se utilizar métodos subjetivos para se obter as probabilidades, como a probabilidade subjetiva comentada no capítulo III (item 3.6).

Henkind e Harrison [HEN88] ressaltam que os demais três cálculos não possuem métodos objetivos bem definidos na aquisição dos valores de certeza, caracterizando as respectivas medidas como subjetivas. Os autores comentam ainda que, na Teoria dos Conjuntos Difusos, embora se pudesse argumentar que as funções características poderiam ser consideradas medidas objetivas, não existe um formalismo único, uniformemente aceito para construir estas funções, caracterizando-as como medidas subjetivas.

Um segundo aspecto comparativo na figura 7-2 refere-se ao momento em que os valores das medidas são fornecidos ao sistema especialista. No Cálculo Bayesiano, os valores de incerteza (probabilidades *a priori*) são adquiridos antecipadamente e

estocados na base do sistema<sup>34</sup>. Para os demais cálculos, os valores são fornecidos ao sistema juntamente com as evidências parciais que surgem durante o processo de inferência. Na Teoria dos Fatores de Certeza (tradicional e modificada), um fator de certeza FC (ou MC e MD) acompanha as evidências parciais. Na Teoria da Evidência, cada evidência parcial apresenta a  $pba$ . No Cálculo da Teoria dos Conjuntos Difusos, as evidências parciais são acompanhadas de seu grau de pertinência<sup>35</sup> [HEN88].

### 7.2.3. Sobre o Processo de Atualização das Medidas de Imprecisão

Abordagem	Tipo de Processo	Relação e $\rightarrow h$
<i>Cálculo Bayesiano</i>	Um único estágio	Implícita
<i>Fatores de Certeza</i>	Dois estágios	Explícita
<i>Teoria da Evidência</i>	Um único estágio	Implícita
<i>Teoria dos Conjuntos Difusos</i>	Dois estágios	Explícita

FIGURA 7-3 : Processo de Atualização em cada Técnica

Na figura 7-3, estão caracterizados dois aspectos distintos relativos ao processo de atualização das crenças em cada abordagem, comentado por Henkind e Harrison [HEN88].

Segundo os autores, nas abordagens Bayesiana e de Dempster e Shafer, cada evidência  $e$  é um atributo considerado

<sup>34</sup> Cabe lembrar que esta característica refere-se ao Cálculo Bayesiano Tradicional. No Tratamento de Incerteza por Redes Bayesianas (item 3.4.8 do Capítulo III), segundo Pearl [PEA85], a designação durante o processo de inferência também é possível.

<sup>35</sup> Há uma particularidade no Cálculo Teoria dos Conjuntos Difusos evidenciada no Capítulo VI (item 6.5.3. b2). Há uma série de imprecisões em sistemas especialistas difusos relacionadas a termos lingüísticos que pode já estar armazenada na base do sistema. As medidas referidas aqui relacionam-se às imprecisões nas evidências que surgem durante o processo de inferência e, mesmo estas, para serem traduzidas pelo sistema, podem necessitar de uma consulta à base de termos lingüísticos (e.g. uma evidência classificada como "quase certa").

presente ou ausente. Conseqüentemente, o cálculo da certeza de uma hipótese  $h$ , dado  $e$ , é conceitualmente um processo de um só passo (ou estágio),  $e \rightarrow h$ . Na abordagem da Teoria dos Conjuntos Difusos e dos Fatores de Certeza, por outro lado, cada evidência possui um valor associado, o que faz com que os processos de atualização possuam dois estágios : a) computa-se a certeza de  $e$  combinando-se algum tipo de valores de certeza das diferentes observações que compõem  $e$ ; b) calcula-se a certeza de  $h$ . Henkind e Harrison [HEN88] enfatizam que, apesar dos Cálculos via Teoria dos Conjuntos Difusos e Fatores de Certeza "fazerem mais" (no sentido de permitirem que a evidência seja incerta), suas complexidades computacionais (lineares) são menores que as complexidades do Cálculo Bayesiano e da Teoria da Evidência (exponenciais).

O segundo aspecto abordado por Henkind e Harrison [HEN88] e presente na figura 7-3 refere-se à transparência na avaliação da incerteza da relação entre hipótese e evidência. Segundo os autores, na abordagem Bayesiana e na Teoria de Dempster e Shafer, esta relação está implícita nas probabilidades *a priori* e nas *pba's*, respectivamente. Na Teoria dos Conjuntos Difusos (dependendo da abordagem) e na Teoria dos Fatores de Certeza, por outro lado, esta relação aparece explicitamente [HEN88] (e.g. "Se os estoques estiverem altos, deve-se reduzir o preço" ( $FC = 0.2$  ou "pouco provável"))).

Outra observação relevante no trabalho de Henkind e Harrison [HEN88] refere-se à *quantidade de informação* nas medidas de imprecisão em cada teoria. Os autores afirmam que, em certo sentido, os cálculos via Teoria Bayesiana e via Teoria da Evidência possuem mais informação que os cálculos na Teoria dos Conjuntos Difusos e Fatores de Certeza. Na Teoria Bayesiana, dada as probabilidades *a priori* necessárias, pode-se obter imediatamente  $P(h/e)$ . De modo semelhante, na Teoria da Evidência, dadas as *pba's* para cada evidência parcial, a crença total em  $h$  pode ser imediatamente computada. Na Teoria dos Fatores de Certeza, por outro lado, somente  $FC$  da evidência e não é suficiente para obter o  $FC$  da hipótese  $h$ , devendo-se ter um

conhecimento adicional, como uma regra de produção. Isto também ocorre na Teoria dos Conjuntos Difusos, dependendo da abordagem utilizada. Henkind e Harrison [HEN88] interpretam esta característica afirmando que a Teoria da Evidência e a Teoria dos Conjuntos Difusos estão mais intimamente ligadas ao conhecimento representado no sistema especialista do que a Teoria Bayesiana e a Teoria da Evidência.

#### 7.2.4. Sobre o Tipo de Imprecisão Representado

Como foi visto no Capítulo II (item 2.3), a imprecisão presente nos sistemas especialistas apresenta-se de diferentes formas. A seguir confronta-se cada técnica com as formas de imprecisão. Cabe salientar, no entanto, que o quadro na figura 7-4 é uma simplificação, já que não se pode caracterizar a eficiência do tratamento com simples respostas do tipo sim/não.

Abordagem	Incert.	Difusão	Inc/Dif.	Ignor.
<i>Cálculo Bayesiano</i>	Sim	Não	Não	Não/Sim
<i>Fatores de Certeza</i>	Sim	Não	Não	Não
<i>Teoria da Evidência</i>	Sim	Não	Não	Sim
<i>Teoria dos Conjuntos Difusos</i>	Sim	Sim	Sim	Sim

FIGURA 7-4 : Tipo de Imprecisão Representado em Cada Técnica

##### 7.2.4.a. Incerteza

A incerteza constitui o tipo de imprecisão ao qual a maioria das abordagens direciona-se. As comparações feitas anteriormente (quadros 7-1, 7-2 e 7-3), em realidade, referem-se ao tratamento deste tipo específico de imprecisão.

##### 7.2.4.b. Difusão

O Tratamento da Imprecisão originada de informações qualitativas, a difusão, constitui um dos principais objetivos da Teoria dos Conjuntos Difusos. No capítulo VI (item 6.1.1.a) foram apresentadas as principais situações onde, segundo os pesquisadores da Teoria dos Conjuntos Difusos, a abordagem probabilística é inadequada.

Entretanto, é relevante ressaltar que estes argumentos são veementemente combatidos por pesquisadores da Teoria da Probabilidade (e.g. [STA77], [HAA79], [NAT83], [CHE86] e [TRI79]). Cheeseman [CHE86], por exemplo, apresenta uma série de ilustrações com o intuito de demonstrar que a Probabilidade pode resolver problemas que a Teoria dos Conjuntos Difusos aponta como insolúveis pela análise probabilística. Em suas conclusões, Cheeseman afirma :

*"A principal razão para o sucesso da abordagem difusa, particularmente a teoria dos conjuntos difusos, parece vir de uma cuidadosa escolha do domínio de aplicação e do uso de um grande tratamento de senso comum em suas interpretações. Infelizmente para a IA, este senso comum não está bem formalizado, de modo que tentativas ingênuas de utilizar a abordagem difusa em programas de IA podem levar a falhas espetaculares. Quando a principal origem de informação está em termos lingüísticos vagos, as tendências introduzidas pela abordagem difusa (ou qualquer outra abordagem razoável) são geralmente completamente cheias de incertezas nas interpretações dos termos lingüísticos. Em tais situações, a simplicidade dos vários formalismos difusos é agradável, mas, mesmo aqui, não se deve considerá-las mais do que aproximações à abordagem inteiramente probabilística. [CHE86].*

Em seu trabalho, Cheeseman [CHE86] enfatiza que a principal razão para que os pesquisadores da Teoria dos Conjuntos Difusos rejeitem a Probabilidade é que estes negligenciam o segundo conceito de Probabilidade, ou seja, a Probabilidade Subjetiva, considerando-a unicamente como freqüencial. Entretanto, como comentou-se no capítulo III (item 3.6), uma análise dos procedimentos subjetivos do ser humano ao avaliar a incerteza não parece indicar que suas estimativas tenham caráter bayesiano. Além disso, ao contrário da função de pertinência, a distribuição de probabilidade não apresenta correspondência intuitiva com o modo pelo qual o ser humano trata conhecimentos difusos.

Não é objetivo deste trabalho traçar um paralelo entre as duas teorias. Entretanto, observando a literatura em tratamento de imprecisão em sistemas especialistas e os estudos relatados nos demais capítulos, é opinião deste autor que a Abordagem Bayesiana

e suas derivações (Teoria da Evidência e Fatores de Certeza) não são adequadas para tratar a imprecisão na forma de difusão.

#### 7.2.4.c. Ignorância

Na figura 7-4, considerou-se o fato de que tratar a ignorância pressupõe a não-designação de medidas de certeza quando estas inexistem.

No Capítulo III (item 3.5), o tratamento da ignorância na Teoria Bayesiana foi apontado como sendo uma de suas principais críticas. A razão é que, no tratamento Bayesiano Tradicional, a não-designação probabilística não é possível. O tratamento da ignorância pode ser feito de duas formas : a) pode-se atribuir probabilidades iguais para todos eventos, com o problema de não haver distinção entre ignorância e medidas de certeza de mesma grandeza; b) pode-se utilizar o conhecimento disponível para atribuir probabilidades "razoáveis"<sup>36</sup>, mas este procedimento também atribui crença quando nada se sabe e não distingue este caso do caso em que as probabilidades são aquelas iguais ao do conhecimento disponível<sup>37</sup>. Isto explica o "Não" na célula do Cálculo Bayesiano em relação ao tratamento de ignorância.

Por outro lado, no Tratamento Bayesiano por Redes Bayesianas, segundo Pearl [PEA85], a não designação é possível, o que justifica o "Sim" na célula do Cálculo Bayesiano em tratamento da ignorância (quadro 7-4).

Na Teoria da Confirmação, a ignorância pode ser representada por uma Fator de Certeza nulo, com o problema de,

---

<sup>36</sup> Henkind e Harrison exemplificam : supondo as probabilidades a priori de  $h_1$  e  $h_2$  sendo 0.6 e 0.4, respectivamente, e  $P(h_1/s)$  e  $P(h_2/s)$  desconhecidas. Uma designação possível seria adotar  $P(h_1/s) = 0.6$  e  $P(h_2/s) = 0.4$ ;

<sup>37</sup> i. e. quando realmente  $P(h_1/s) = 0.6$  e  $P(h_2/s) = 0.4$ .

como no caso bayesiano, não se distinguir a ignorância do caso em que as crenças negativas e positivas são idênticas. De acordo com o critério da não-designação, optou-se por não atribuir à Teoria da Confirmação a capacidade de tratar ignorância.

Na Teoria da Evidência, a ignorância é representada pela atribuição de crença a subconjuntos maiores (i.e. quando houver mais conhecimento, a crença seria designada ao menor subconjunto, ou mesmo a um conjunto unitário [HEN88]). A princípio isto pode parecer contraditório com o critério da não-designação, mas, na realidade, não há designação quando a crença em um subconjunto não existe, ela é passada para seu super-conjunto.

Na Teoria dos Conjuntos Difusos, o grau de ignorância pode ser medido pela utilização dos conceitos de necessidade e possibilidade [HEN88]. Neste trabalho, entretanto, os procedimentos explicitados no Capítulo VI não apresentam os mecanismos pelos quais a Teoria Difusa trata a ignorância. Para considerar esta forma de imprecisão em sistemas especialistas, segundo a Teoria Difusa, o leitor deve aprofundar-se no tópico "Necessidade e Possibilidade", consultando os trabalhos de Dubois e Prade [DUB80], Prade [PRA81] e [PRA82], Zadeh [ZAD83b], Zemankova-Leech e Kandel [ZEM84] e, principalmente (por fazerem uma survey do assunto), Moccetti [MOC88] e Hall [HALL86].

#### 7.2.5. Sobre a Complexidade Computacional

Abordagem	Informação	Tempo
<i>Cálculo Bayesiano</i>	$O(2^{m+n})$	$O(2^m)$
<i>Fatores de Certeza</i>	$O(p)$	$O(p)$
<i>Teoria da Evidência</i>	$O(n \cdot 2^m)$	$O(2^{m \cdot n})$
<i>Teoria dos Conjuntos Difusos</i>	$O(m)$	$O(m)$

Onde :  $n$  é o número de hipóteses,

$m$  é o número de evidências parciais,

$p$  é o número de hipóteses ou evidências parciais.

FIGURA 7-5 : Complexidade Computacional de Cada Técnica



As complexidades na figura 7-5 são as de pior caso, ou seja, não se considerou nenhuma simplificação adicional aos métodos com o objetivo de reduzir a complexidade. Nos casos da Teoria Bayesiana, Teoria da Confirmação e Teoria da Evidência, a complexidade já fora anteriormente estudada (Capítulo III (item 3.3.2), Capítulo IV (item 4.6) e Capítulo V (item 5.4), respectivamente). No quadro da figura 7-5, apenas resume-se os resultados obtidos naquela oportunidade, a título de comparação. Na Teoria dos Conjuntos Difusos, no entanto, não se analisou a complexidade computacional no capítulo VI, havendo, então, a necessidade de se explicitar aqui os resultados apresentados na figura 7-5.

Como afirmam Henkind e Harrison [HEN88], há uma dificuldade em se analisar a complexidade computacional na Abordagem Difusa, devido às múltiplas maneiras de calcular a certeza em uma hipótese  $h_i$ , dada a evidência  $e_j$ . Pode-se encontrar uma análise de alguns métodos de verificação da complexidade da abordagem difusa em diagnóstico médico no trabalho de Adlassnig [ADL82]. Aqui, no entanto, segue-se a abordagem de Henkind e Harrison [HEN88], que escolhem um destes métodos para ilustrar a complexidade da Abordagem Difusa em Diagnóstico Médico.

No método exposto em [HEN88], assume-se cada evidência  $e$  como um conjunto difuso. Cada observação (evidência) é mapeada em um grau difuso de pertinência relacionado a um conceito previamente definido (e.g. a evidência "temperatura = 38°C" implica em  $\mu_{\text{febre}} = 0.81$ ). Este mapeamento é feito através de uma função de pertinência. Existindo  $n$  evidências possíveis, existirão  $n$  funções características necessárias [HEN88].

Cada hipótese é identificada por um conjunto padrão de evidências (expressas como uma sequência de conjunções e disjunções com extensão máxima de  $n$ ). Calcular a certeza em uma hipótese  $h_i$ , portanto, pressupõe o cálculo de uma sequência de conjunções e disjunções usando os graus de pertinência. Uma vez

que  $n$  funções características são necessárias, a complexidade da informação é de  $O(n)$ . Assumindo-se as definições usuais da Teoria dos Conjuntos Difusos para as operações de união e intersecção (itens 6.2.2.03 e 6.2.2.04), a complexidade do tempo também é de  $O(n)$  [HEN88].

Como pode-se constatar no capítulo VI, há formulações mais sofisticadas na abordagem difusa. Por exemplo, ao invés de ser caracterizada por um grau de pertinência (e.g.  $\mu_{\text{febre}} = 0.81$ ), a evidência pode ser caracterizada por termos lingüísticos, traduzidos em conjuntos difusos (e.g. "febre baixa"), como no sistema Z-II (item 6.5 do capítulo VI). Nestes casos, a certeza da hipótese  $h$  pressupõe a utilização do *modus ponens generalizado*. Henkind e Harrison não analisaram em detalhes a complexidade computacional deste caso, mas sugerem que ela parece ser polinomial [HEN88].

### 7.3. REQUISITOS PARA RACIOCINAR COM IMPRECISÃO

Nesta seção, apresenta-se o trabalho de Bonissone [BON87], no qual o autor define 13 requerimentos que uma abordagem ideal para raciocinar sob imprecisão deve ter. Este estudo é relevante por dois motivos :

a) Pode-se evidenciar, embora de modo simples (já que Bonissone não avalia a extensão com a qual cada técnica cobre os requisitos), as vantagens e desvantagens de cada técnica em relação às demais.

b) Com o esquema proposto por Bonissone [BON87], pode-se ressaltar, para cada técnica, as deficiências que devem ser supridas para aproximá-la do ideal.

De sua revisão do "estado-da-arte", Bonissone [BON87] obtém 13 requerimentos que, segundo o autor, devem ser satisfeitos por um formalismo ideal para representar a imprecisão e fazer inferências com imprecisão. Posteriormente, Bonissone compara

algumas das abordagens existentes para o Tratamento de Imprecisão com esta lista de requerimentos. Explicitamente, os 13 requerimentos propostos por Bonissone são [BON87] :

1. As regras de combinação não deveriam basear-se em hipóteses globais de evidências independentes.
2. As regras de combinação não deveriam assumir a exaustividade e exclusividade das hipóteses.
3. Deveria existir uma representação explícita do total de evidência para o apoio e para a refutação de qualquer hipótese dada.
4. Deveria existir uma representação explícita das razões para o apoio ou refutação de qualquer hipótese.
5. A representação deveria permitir ao usuário descrever a incerteza da informação ao nível de detalhe disponível (i.e. permitir granularidade de informação heterogênea).
6. Deveria haver uma representação explícita da consistência. Algumas medidas de consistência e compatibilidade deveriam estar disponíveis para detectar tendenciosidades a conflitos e para identificar fatores essenciais que contribuem no conflito.
7. Deveria haver uma representação explícita da ignorância para permitir ao usuário fazer proposições não-classificadas, ou seja, expressar a ausência de convicção do usuário sobre a certeza de qualquer dos eventos disponíveis. Alguma medida de ignorância, similar ao conceito de entropia, deveria estar disponível para guiar a obtenção de informações discriminantes.
8. Deveria ser clara a distinção entre um conflito na informação (i.e. violação de consistência) e ignorância sobre a informação.
9. Deveria existir uma medida de segunda ordem de incerteza. É importante medir tanto a incerteza na informação como a incerteza na própria medida de incerteza.
10. A representação deve ser, ou ao menos parecer ser, natural para capacitar o usuário a descrever a incerteza na entrada e interpretar a incerteza na saída. A representação deve também ser natural ao especialista para possibilitar a elucidação de medidas consistentes ou razões para a incerteza. A semântica para qualquer operação numérica usada para propagar e agregar incerteza deveria ser clara.
11. A sintaxe e a semântica da representação de incerteza deveriam ser fechadas sobre as regras de combinação.
12. Fazer comparações par a par (*pairwise*) de incerteza deveria ser possível uma vez que o ranking cardinal e ordinal induzido é necessário para realizar qualquer tipo de atividades de tomada de decisão.
13. A detalhabilidade da agregação e propagação de incerteza através do processo de raciocínio deveria ser possível para resolver conflitos ou contradições, para explicar o suporte das conclusões e para realizar meta-raciocínio para controle.

A figura 7-6, a seguir, traduz as opiniões de Bonissone [BON87] sobre como cada abordagem satisfaz cada um dos 13 requerimentos anteriores. Cabe salientar que, no caso da Abordagem Difusa, Bonissone considera somente o método da Possibilidade e Necessidade.

REPRESENTAÇÃO DA INCERTEZA	N Ú M E R O   D O   R E Q U E R I M E N T O												
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13
1. Bayesiano Modificado	N	N	N	N	N	N	N	N	N	S	S	S	N
2. Fatores de Certeza	N	S	S/N*	N	N	N	S	N	N	N	N	S	N
3. Teoria da Evidência	N	N	S	N	S	S	S	S	S	S	S	S	N
4. Necessidade e Possib. Difusas	S	S	S	N	S	S	S	S	S	S	S	S	N

\* O Fator de Certeza utilizado na Teoria da Confirmação foi inicialmente obtido da diferença entre MC e MD. Estas medidas permitiram a representação explícita do apoio e refutação. Entretanto, posteriormente, o Fator de Certeza foi modificado (Cálculo EMYCIN), sendo obtido diretamente do usuário, sendo que novos fatores de certeza foram calculados a partir dos antigos, sem manter as duas medidas (MC e MD). Por esta razão, esta célula apresenta a classificação S/N [BON87].

FIGURA 7-6 : Esquema Comparativo das abordagens estudadas com relação às características desejáveis de uma abordagem ideal para o tratamento de Imprecisão em Sistemas Especialistas - FONTE [BON87].

#### 7.4. CONCLUSÕES

Nesta seção são apresentadas as principais conclusões oriundas dos estudos que fundamentaram o presente trabalho.

##### 7.4.1. O Domínio de Aplicação de Cada Técnica

Uma das principais conclusões que este levantamento do "estado da arte" propiciou refere-se ao domínio de aplicação de cada uma das abordagens. Ao contrário do que muitos pesquisadores assumem, nenhum dos métodos estudados é normativo. Em outras palavras, a variabilidade de problemas em IA onde a imprecisão é relevante impossibilita a aplicação de uma única técnica

invariavelmente. Assim, até que se encontre um método normativo (se é que isto realmente é possível), o domínio das diferentes abordagens por parte do engenheiro de conhecimento é de vital importância para que este possa tratar a imprecisão nas mais variadas formas e situações possíveis. Em termos mais explícitos, verifica-se que cada uma das técnicas possui melhor adequabilidade a certos tipos de situação.

#### 7.4.1.a. A Aplicabilidade da Teoria Bayesiana

A Teoria Bayesiana possui como grande vantagem os sólidos fundamentos sobre os quais seus procedimentos estão embasados. Assim, quando o sistema especialista é repetidamente aplicado sob condições tão constantes que as respostas fornecidas assumem o caráter randômico com chances previamente conhecidas, sem dúvidas, a Teoria Bayesiana é a mais adequada.

Embora isto pareça ser muito restritivo, esta filosofia tem fundamentado soluções atribuídas a problemas reais. Na Engenharia de Produção, por exemplo, há problemas em controle de qualidade cujo caráter randômico da existência de lotes defeituosos foi eficientemente modelado por sistemas bayesianos. Isto pode indicar que, em um sistema especialista em controle de qualidade, as medidas das incertezas relativas à aleatoriedade da qualidade dos lotes possa ser medida de forma objetiva (probabilidade freqüencial) e considerada pelo sistema segundo um Raciocínio Bayesiano.

Além disso, é grande o número de pesquisadores que têm buscado métodos bayesianos normativos em Inteligência Artificial. As Redes Bayesianas, por exemplo, são uma alternativa à dificuldade do Raciocínio Probabilístico Bayesiano em atribuir medidas de certeza durante o processo de inferência. Estes esforços devem trazer novas contribuições ao Tratamento de Imprecisão, ampliando o escopo de aplicabilidade dos Métodos Bayesianos.

#### 7.4.1.b. A Aplicabilidade da Teoria dos Fatores de Certeza

O sucesso da aplicabilidade dos Fatores de Certeza em Inteligência Artificial está relacionado a uma série de características que devem ser evidenciadas no problema-alvo. São elas :

a) Uma vez formalizado, o conhecimento não deve indicar uma rede de inferência cuja atualização nas crenças pressupõe uma extensiva série de avaliações. Isto se deve ao problema comentado no capítulo IV (item 4.5) da convergência assintótica das medidas MC e MD, em consequência das funções de combinação. Apesar disso, se as demais restrições forem respeitadas, pode-se evitar este problema adotando-se o Fator de Certeza Modificado.

b) Em função de ter sido criada para um domínio específico de aplicação, a teoria dos Fatores de Certeza assume determinadas hipóteses que, obrigatoriamente, devem ser respeitadas pelo problema a ser tratado. Assim, deve-se partir de probabilidades iniciais baixas para as hipóteses ([BUC84], pg. 211) e deve haver a independência entre as evidências.

c) A obtenção de estimativas probabilísticas é difícil ou a resolução da incerteza do problema está muito mais fundamentada nas crenças do usuário (influenciadas pela contingência) do que por um comportamento randômico. Caso contrário, a Abordagem Bayesiana poderia ser mais indicada.

A aplicação dos Fatores de Certeza em Sistemas Especialistas está, na verdade, fundamentada nas facilidades na implementação computacional e na baixa complexidade dos mecanismos de atualização. Entretanto, se as características do problema não respeitarem as restrições anteriores, pode-se ter resultados insatisfatórios. Além disso, caso as vantagens de implementação e complexidade sejam irrelevantes e as características do problema estejam conforme o exposto, o mais adequado parece ser o que dois dos próprios autores da Teoria dos Fatores de Certeza, Gordon e Shortliffe, propõem [GOR84] : a utilização da Teoria de Dempster e Shafer.

#### 7.4.1.c. A Aplicabilidade da Teoria da Evidência

Ao se analisar a Teoria da Evidência de Dempster-Shafer, é nítido o fato de que o problema a ser tratado deve ter a característica de ser facilmente descritível em um conjunto exaustivo de hipóteses, no qual se procura a hipótese mais provável. Esta preocupação deve estar presente desde a etapa de formulação do conhecimento, a fim de que o especialista tenha claramente definido o(s) quadro(s) de discernimento  $\Theta$  e seus subconjuntos.

Por outro lado, a Teoria apresenta o inconveniente de, a cada acréscimo de conhecimento ao sistema (no caso das *shells*, por exemplo), dever-se reestruturar o quadro  $\Theta$  e identificar as inter-relações das novas hipóteses com as já existentes. Assim, o especialista deverá continuar modificando os procedimentos de atualização das crenças quando novos conhecimentos forem adicionados ao sistema, a menos que uma estrutura pré-definida seja implementada. Eis aqui uma área potencial para novos estudos na Teoria.

A principal vantagem da Teoria da Evidência, proveitosa em Sistemas Especialistas, é a possibilidade de associar crença a conjuntos de hipóteses dependentes, sem a necessidade de se especificar esta crença entre cada hipótese que forma este conjunto. Em Sistemas Especialistas isto é realmente atrativo, principalmente nos casos onde há nítida interdependência entre hipóteses. Buxton [BUX89] exemplifica duas situações práticas onde verifica-se esta característica :

a) Em um estudo de incidências de falhas em uma fábrica produzindo janelas verifica-se que os moldes e as pressões são usadas em pares com o mesmo molde tendo associada sempre a mesma pressão. Quando uma combinação particular de molde e pressão parece apresentar alto índice de defeitos, pode-se desejar associar crença ao fato de ou o molde ou a pressão serem suspeitos. Mas pode ocorrer o caso em que as evidências não permitem concluir nada sobre a extensão com a qual o alto nível de defeitos deve-se ao molde, ao invés da pressão. [BUX89]

b) A possibilidade de se associar crenças a superconjuntos sem discriminá-la também é interessante no Raciocínio Hierárquico<sup>38</sup>, como o que ocorre em diagnóstico médico. Neste caso, pode-se começar o raciocínio verificando a crença em diferentes classes de doenças (e.g. doenças pulmonares) [BUX89]. Neste estágio, embora as evidências possam não especificar nada sobre as doenças individuais em cada classe pode-se fazer uma inferência dirigida por avaliações de crenças.

Uma das críticas à abordagem da Teoria da Evidência pode ser também um impedimento à sua implementação computacional. Trata-se de sua complexidade potencialmente exponencial, devido à Regra de Dempster para atualização das crenças. Em sistemas onde o número de hipóteses e de inter-relações entre as mesmas é significativo, o Tratamento da Incerteza pela Teoria da Evidência pode trazer inconvenientes à performance do sistema.

Este fato tem levado muitos pesquisadores a buscarem algoritmos de atualização de crenças via Regra de Dempster em tempo polinomial ([BARN81]) e linear ([SHA87a], [SIL89]). Além disto, também tem se buscado novas definições para a regra de combinação de crenças ([HAU90]). Estes estudos visam aumentar a performance de sistemas especialistas cuja incerteza é tratada pela abordagem de Dempster e Shafer e caracterizam um dos grandes campos de pesquisa na Teoria de Dempster e Shafer.

#### 7.4.1.d. A Aplicabilidade da Teoria dos Conjuntos Difusos

A principal diferença entre a Abordagem Difusa e as anteriores está no tipo de imprecisão que cada uma delas trata. Deste modo, quando o conhecimento fornecido pelo especialista estiver fundamentado em conceitos lingüísticos, como indicado no capítulo VI, a abordagem mais indicada parece ser a Teoria Difusa.

Entretanto, cabe ressaltar que há determinadas

---

<sup>38</sup> Além disso, no Raciocínio Hierárquico determinadas características simplificam a complexidade da Regra de Dempster ([SHA85b] e [SHA87]).



dificuldades nesta abordagem. Por exemplo, uma das premissas necessárias aos sistemas especialistas difusos é que as funções de pertinência representem o mais fidedignamente possível os conceitos do especialista. Muitos métodos têm sido propostos na literatura (e.g. [KAU75], [DEV85], [HALL86b]<sup>39</sup>, [NOR84], [TUR86]) para a determinação e avaliações das funções de pertinência e o engenheiro de conhecimento vai encontrar neste ponto um dos "gargalos" do sistema.

Outro aspecto crítico na implementação de sistemas especialistas difusos é a definição dos operadores a serem utilizados no processo de inferência. Para os operadores de união e intersecção de conjuntos não existe uma única definição possível e cabe ao engenheiro de conhecimento avaliar se as definições clássicas (capítulo VI, itens 6.2.2.a3 e 6.2.2.a4) são adequadas em seu problema.

Finalmente, a flexibilidade inerente à Teoria dos Conjuntos Difusos pode ser uma dificuldade, na medida em que há ainda pouca orientação sobre qual dos diferentes métodos adotar. Assim, a aplicação da Teoria Difusa no Tratamento da Imprecisão pressupõe o aprofundamento do engenheiro de conhecimento nos diferentes métodos e a simulação destes para identificar o mais adequado ao problema. Isto evidencia a necessidade de mais pesquisas nesta abordagem de modo a facilitar estes esforços.

#### 7.4.1.e. A Aplicabilidade Conjunta das Várias Abordagens

Como visto anteriormente, as situações em que cada técnica melhor se adequa são diferentes. Em problemas reais de grande complexidade (i.e. envolvendo certa sinergia entre áreas de

---

<sup>39</sup> Hall [HALL86b] apresenta um método para avaliar funções de pertinência em Sistemas Especialistas e um conjunto de critérios para verificar a plausibilidade das funções resultantes. Assim, este trabalho constitui importante subsídio aos construtores de Sistemas Especialistas Difusos.

conhecimento - e.g. O problema do Capital de Giro [SEC90]), parece haver a possibilidade de se aplicar mais do que uma das técnicas em diferentes módulos do programa.

Assim, por exemplo, quando o sistema consultasse um de seus módulos apenas com o objetivo de buscar uma conclusão em rápido tempo computacional, poder-se-ia utilizar os Fatores de Certeza. Caso o Sistema possua um módulo onde as informações estão arquivadas em registros históricos e podem ser traduzidas em distribuições de probabilidade, a abordagem neste módulo seria a Bayesiana. Na interface do sistema, pode-se traduzir as informações colocadas em linguagem natural na forma de conjuntos difusos e utilizar esta abordagem em inferências que necessitassem destas informações qualitativas.

Para que isto seja possível, no entanto, há a necessidade de mais pesquisas no que se refere à relação existente entre cada uma das medidas de certeza das diferentes abordagens. Isto porque ainda não se pode claramente partir de uma evidência com incerteza medida, por exemplo, em grau de pertinência, para um processo de inferência segundo a Teoria Bayesiana. Vários pesquisadores têm estudado as conexões entre as diferentes abordagens<sup>40</sup>, mas os resultados direcionam-se mais a formar paralelos teóricos entre as medidas do que buscar um formalismo de inferência mista, ou seja, a partir de regras concluídas em uma

---

<sup>40</sup> Henkind e Harrison [HEN88] apresentam uma síntese dos principais resultados destes estudos. Além disso, os autores indicam uma série de trabalhos na conexão das medidas de certeza entre as abordagens Bayesiana e Teoria da Evidência (Hummel e Landy [HUM88] e Kyburg [KYB87]), Teoria Bayesiana e Fatores de Certeza (Adams [ADA76]), Teoria da Evidência e Fatores de Certeza (Gordon e Shortliffe [GOR84], Shafer [SHA76] e Grosz [GRO86a]), Abordagem Difusa e Fatores de Certeza (Prade [PR83] e Schefe [SCH80]), além de outras (Grosz [GRO86b], Prade [PR83] [PR85], Thompson [TH85] e Schefe [SCH80]). Recentemente, Yen [YEN90] propôs a generalização da Teoria da Evidência para a Teoria dos Conjuntos Difusos, tornando o cálculo da crença um problema de otimização na abordagem Difusa.

abordagem, iniciar a inferência segundo outra.

## 7.5. RECOMENDAÇÕES

### 7.5.1. Ampliação do Trabalho

Apesar de ser uma das intenções iniciais deste autor, não foi possível apresentar uma implementação computacional a cada uma das abordagens estudadas. A principal razão é o fato de o tempo consumido na formalização de cada técnica e no próprio levantamento bibliográfico ter impossibilitado a efetivação de implementações no período destinado ao trabalho. Indubitavelmente, a análise comparativa e mesmo o entendimento de cada abordagem teria sido imensamente facilitado se as implementações tivessem sido possíveis.

Deste modo, é sugestão deste autor que os fundamentos aqui presentes possam embasar implementações computacionais das abordagens, preferencialmente em um mesmo sistema especialista, a fim de que um estudo comparativo de performance seja facilitado.

Outra ampliação possível é a consideração de outras abordagens no Tratamento de Imprecisão que não foram estudadas neste trabalho. Especificamente, sugere-se a inclusão das abordagens não-numéricas, especialmente a Teoria dos Endorsments de Cohen [COH85], implementada no sistema SOLOMON e a Teoria de Doyle [DOY83], baseada em Lógica Não-monotônica<sup>41</sup>. Estas abordagens visam principalmente eximirem certas limitações das abordagens numéricas, principalmente no que se refere ao conflito do processamento simbólico, relevante qualidade dos sistemas

---

<sup>41</sup> Na Lógica Clássica, a inclusão de uma informação ao sistema que ocasione a crença em uma variável  $m$  já instanciada anteriormente, obriga uma atualização deste valor. Este aspecto é denominado "Monotônico". Nos sistemas não-monotônicos, pode-se rejeitar as inferências feitas anteriormente à presença de um novo dado, ou mesmo arquivá-las paralelamente, admitindo-se contradições (mais detalhes em [KIM88a], [KIM88b])

especialistas, com a necessidade de avaliações numéricas que estas abordagens exigem.

#### 7.5.2. A Pesquisa em Tratamento de Imprecisão

As necessidades presentes no Tratamento de Imprecisão que ainda não foram supridas pelas técnicas apresentadas são significativas. Ao longo destes estudos, tem-se verificado várias áreas em que o leitor pode encontrar temas importantes para dedicar pesquisas. Especificamente :

a) Na Teoria Bayesiana, as Redes Bayesianas, por serem excelente mecanismo de formalização do conhecimento, têm sido pesquisadas a fim de apresentarem soluções aos problemas de complexidade computacional e tratamento de ignorância.

b) Na Teoria da Evidência, segundo Bhatnagar e Kanal [BHA86], um dos aspectos ainda não abordados é a atualização de crenças em sistemas em que o conhecimento caracteriza mais do que um quadro de discernimento. A implicação causal da regra de produção entre subconjuntos de diferentes quadros de discernimento permanece sem interpretações [BHA86].

c) Outra área de intensas pesquisas na Teoria da Evidência é a criação de algoritmos computacionais que reduzam a complexidade da Regra de Combinação de Dempster, a fim de melhorar a performance do sistema ao atualizar as crenças.

d) Na Teoria Difusa, há estudos na formalização de métodos para construir funções de pertinência para termos qualitativos presentes no discurso humano, a fim de automatizar o processo de interface homem-máquina na forma de linguagem natural. Além disso, parece interessante a realização de pesquisas na performance prática de cada operador disponível, bem como das diferentes definições de possibilidade condicional, necessária na abordagem de Zadeh (Capítulo VI, item 6.4).

### 7.5.3. O Aprofundamento em uma das Técnicas

Finalmente, sugere-se trabalhos mais específicos a cada uma das técnicas, acompanhados de um exemplo prático onde a performance computacional pudesse ser avaliada. Além disso, o leitor pode aprofundar o estudo teórico na técnica escolhida, apresentando relevantes pontos não abordados no presente trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ADA76] ADAMS, J. B.  
A Probability Model of Medical Reasoning and the MYCIN Model  
*Mathematical Biosciences*, Vol. 32, pp. 177-186 - 1976.
- [ADA84] ADAMS, J. Barclay  
Probabilistic Reasoning and Factors Certainty.  
in *Rule-Based Systems - The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project*  
Eds. B. G. Buchanan and E. H. Shortliffe  
Addison-Wesley Pub. Comp. - USA - October, 1984.
- [ADL82] ADLASSNIG, K. P.  
A Survey on Medical Diagnosis and Fuzzy Subsets  
in *Approximate Reasoning in Decision Analysis*  
Eds. M. M. Gupta and E. Sanchez - North Holland  
pp. 203-217 - 1982.
- [BAR91b] BARCIA, Ricardo M.; MONTENEGRO, Fernando B.; LUNA, Paulo T. M. & PACHECO, Roberto C. S.  
*Treatment of Uncertainty and Subjectivism on a Working Capital Management DSS.*  
TIMS XXX - SOBRAPO XXIII Joint International Meeting - Rio de Janeiro, Brasil - July 15-17 - 1991.
- [BAR91b] BARCIA, Ricardo M.; MONTENEGRO, Fernando B.; LUNA, Paulo T. M. & PACHECO, Roberto C. S.  
*A Working Capital Management Decision Support System - SECAGI.*  
TIMS XXX - SOBRAPO XXIII Joint International Meeting - Rio de Janeiro, Brasil - July 15-17 - 1991.
- [BARC90] BARCO, Luiz  
A Lógica que Acabou com a Própria Lógica  
*Revista Super Interessante*, pp. 35, Agosto - 1990.
- [BARN81] BARNETT, J. A.  
Computational Methods for a Mathematical Theory of Evidence  
*Proceeding of IJCAI'81*, pp. 868-875 - 1981
- [BAS86] BASU, Amit  
*Imprecise Reasoning in Intelligent Decision Support Systems.*  
Dissertation of the Requirement of the Degree of Doctor of Philosophy - University of Rochester  
UMI Dissertation Information Service - 1986.
- [BAT90] BATALHA, Mário Otávio & DEMORI, Flávio  
*A Pequena e Média Indústria em Santa Catarina*  
Editora da UFSC - Florianópolis, SC - 1990.

- [BAU85] BAUMOL, William J. & BLINDER, Alan S.  
*Principles and Policy* - Third Edition  
Harcourt Brace Tovawovich, Inc - USA - 1985.
- [BAZ79] BAZARAA, Mokhtar S. & SHETTY, C. M.  
*Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*.  
John Wiley & Sons - USA - 1979.
- [BEN88] BENSANA, E. ; BELL, G. & DUBOIS, D.  
OPAL: A Multi-Knowledge-Based System for Industrial  
Job-shop Scheduling  
*Int. J. Prod. Res.*, Vol. 26, No.5, pp.795-819 - 1988.
- [BHA86] BHATNAGAR, Raj K. & KANAL, Laveen N.  
Handling Uncertainty Information : A Review of Numeric  
and Non-numeric Methods  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 3-26, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [BON85] BONISSONE, P. P. & R. TONG, M.  
Editorial: Reasoning with Uncertainty in Expert Systems.  
*International Journal of Man-machine Studies*  
Vol. 22, pp. 241-250 - 1985.
- [BON87] BONISSONE, P.  
Reasoning, Plausible.  
*Encyclopedia of Artificial Intelligence*  
John Wiley & Sons - New York - 1987.
- [BUC84] BUCHANAN, B. G. & SHORTLIFFE, E. H.  
Reasoning Under Uncertainty.  
*Rule-Based Systems - The MYCIN Experiments of the  
Stanford Heuristic Programming Project*  
Eds. B. G. Buchanan and E. H. Shortliffe  
Addison-Wesley Pub. Comp. - USA - October, 1984.
- [BUCK86] BUCKLEY, J. J.; SILER, W. & TUCKER, Douglas  
A Fuzzy Expert System.  
*Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 20, pp. 1-16 - 1986.
- [BUX89] BUXTON, Richard  
Modelling Uncertainty in Expert Systems.  
*Int. J. Man-Machine Studies*, Vol 31, pp. 415-476 - 1989.
- [CAR81] CARLSSON, C.  
*Solving Ill-structured Problems Through Well-structured  
Fuzzy Programming*  
in J. P. Brans, Ed. - *Operational Research* 81  
North Holland, Amsterdam - 1981.

- [CHA86] CHANDRASEKARAN, B. & TANNER, Michael C.  
Uncertainty Handling in Expert Systems : Uniform vs.  
Task-Specific Formalism.  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 35-46, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [CHE86] CHEESEMAN, P.  
Probabilistic versus Fuzzy Reasoning.  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 85-102, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [COH85] COHEN, Paul R.  
*Heuristic Reasoning about Uncertainty : An Artificial  
Intelligence Approach.*  
Pitman Advanced Publishing Program - 1985.
- [CLI86] CLIFFORD, James; JARKE, Mathias & LUCAS, Henry C. Jr.  
Designing Expert Systems in a Business Environment  
*Artificial Intelligence in Economics and Management* -  
Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland),  
pp. 221-231 - 1986.
- [COL89] COLLINS COBUILD ENGLISH LANGUAGE DICTIONARY  
William Collins Sons & Co. Ltd - London - 1989.
- [COS89] COSTA, Newton C. A. da  
Aspectos Atuais da Lógica.  
*Palestra Proferida no 6<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro em  
Inteligência Artificial*  
Soc. Bras. Computação - PUC/RJ - 6 a 9 Novembro de 1989.
- [DAV77] DAVIS, R.; BUCHANAN, B. & SHORTLIFFE, E.  
Production Rules as a Representation for Knowledge-Based  
Consultation Program.  
*Artificial Intelligence*, Vol. 8, No. 1, pp. 15-45 - 1977.
- [DOY83] DOYLE, J.  
Methodological Simplicity in Expert System Construction:  
the Case of Judgements and Reasoned Assumptions.  
*The AI Magazine*, pp. 39-43, Summer - 1983.
- [DUB80] DUBOIS, Didier & PRADE, Henry  
*Fuzzy Sets and Systems - Theory and Applications.*  
Academic Press - New York - 1980.
- [DUD76] DUDA, R. O.; HART, P. E. & NILSSON, N. J.  
Subjective Bayesian Methods for Rule-Based Systems.  
*Proceedings of AFIPS Conference* - New York,  
Vol. 45, pp. 1075-1082 - June 1976.



- [DUD83] DUDA, R. D. & SHORTLIFFE, E. H.  
Expert Systems Research.  
*Science*, Volume 220, Number 4594, pp. 261-268, 15 April 1983.
- [DUT85] DUTTA, Amitava  
Reasoning with Imprecise Knowledge in Expert Systems.  
*Information Sciences*, Vol. 37, No. 1, pp. 3-24 - 1985.
- [FIS87] FISCHLER, Martin A. & FIRSCHEIN, Oscar  
*Intelligence : the eye, the brain, and the computer*.  
Addison-Wesley Publishing Company Inc. - 1987.
- [FRA88] FRANKLIN, Jude E.; CARMODY, Cora Lackey; KELLER, Karl;  
LEVITT, Tod S. & BUTEAU, Brandon L.  
Expert System Technology for the Military: Selected Samples.  
*Proceedings of the IEEE*, Vol. 76, No. 10, October - 1988
- [GAI77] GAINES, B. R.  
Foundations of Fuzzy Reasoning.  
in *Fuzzy Automata And Decision Processes*  
ed. M Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines  
North Holland - New York - 1977.
- [GAI81] GAINES, B. R.  
Fuzzy Reasoning and its Applications - Introduction.  
in *Fuzzy Reasoning and its Applications*  
Eds. E. H. Mamdani e B. R. Gaines,  
Academic Press - 1981.
- [GIL81] GILES, R.  
Lukasiewicz Logic and Fuzzy Set Theory.  
in *Fuzzy Reasoning and its Applications*  
Eds. E. H. Mamdani e B. R. Gaines,  
Academic Press - 1981.
- [GIT87] GITMAN, Lawrence J.  
*Princípios da Administração Financeira*.  
Editora Harbra Ltda, SP - Brasil - 1985.
- [GLY85] GLYMOUR, Clark  
Independence Assumptions and Bayesian Updating.  
*Artificial Intelligence*, Vol. 25, pp. 95-99 - 1985.
- [GOR84] GORDON, Jean & SHORTLIFFE, Edward H.  
The Dempster-Shafer Theory of Evidence.  
in *Rule-Based Systems - The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project* -  
Eds. B. G. Buchanan and E. H. Shortliffe -  
Addison-Wesley Pub. Comp. - USA - October, 1984.

- [GRO86a] GROSOFF, Benjamin. N.  
Evidential Confirmation as Transformed Probability : On  
Duality of Priors and Updates  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 153-166, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [GRO86b] GROSOFF, Benjamin. N.  
An Inequality Paradigm for Probabilistic Knowledge : The  
Logic of Conditional Probability Intervals  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 259-275, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [HAA79] HAACK, S.  
Do We Need Fuzzy Logic ?  
*Int. J. Man-Machine Studies*, Vol 11, pp. 437-445 - 1979.
- [HAL86] HALL, Homer Keith Jr.  
*The Process of Decision Making under Uncertainty with an  
Application to the Theory of Expert Systems.*  
A Thesis Submitted to Purdue University for Degree of  
Doctor of Philosophy.  
UMI - Dissertation Information Service - April 1986.
- [HALL86] HALL, Lawrence O'Higgins  
*A Methodological Approach To A Re-usable Fuzzy Expert  
System.*  
Dissertation of the Florida State University College of  
Arts and Sciences.  
UMI - Dissertation Information Service - April 1986.
- [HALL86b] HALL, Lawrence O.; SZABO, Sue & KANDEL, Abraham  
On the Derivation of Memberships for Fuzzy Sets in  
Expert Systems  
*Information Sciences*, Vol. 40, pp. 39-52 - 1986.
- [HAU90] HAU, Hai Yen & KASHYAP, Rangasami L.  
Belief Combination and Propagation in a  
Lattice-Structure Inference Network  
*IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*  
Vol. 20, No. 1, pp 92-93, January/February - 1990.
- [HEN88] HENKIND, Steven J. & HARRISON, Malcolm C.  
An Analysis of Four Uncertainty Calculi.  
*IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*  
Vol. 18, No. 5, pp. 700-714, September/October - 1988.
- [HIN87] HINK, Robert F. & WOODS, David L.  
How Humans Process Uncertain Knowledge : An Introduction  
for Knowledge Engineers.  
*AI Magazine*, pp. 41-53 - Fall 1987.

- [HOF86] HOFFMAN, Elizabeth; JACOB, V. S.; MARSDEN, James R. & WHINSTON, Andrew  
Artificial Intelligence in Economics - Expert Systems Modelling of Microeconomic Systems  
*Artificial Intelligence in Economics and Management* - Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland), pp. 1-9 - 1986.
- [HUM88] HUMMEL, R. A. & LANDY, M. S.  
Evidence as Opinions of Experts  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*, Vol 2. pp. 43-53, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer North Holland - 1988.
- [ISH82] ISHIZUKA, Mitsuru; FU, K. S. & YAO, James T.P.  
Inference Procedures Under Uncertainty for the Problem-Reduction Method.  
*Information Sciences*, Vol. 28, pp. 179-206 - 1982.
- [IWA86] IWASIECZKO, B.; KORCZAK, J.; KWIECIEN, M. & MUSZYNSKA, J.  
Expert System in Financial Analysis  
*Artificial Intelligence in Economics and Management* - Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland), pp. 113-120 - 1986.
- [JOH85] JOHNSON, R. W.  
Independence and Bayesian Updating Methods.  
*Proceedings of the Workshop on Uncertainty and Probability in Artificial Intelligence*, University of California, Los Angeles, August, pp. 95-99 - 1985.  
Reprinted in *Uncertainty in Artificial Intelligence* Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer, North Holland - 1986.
- [KAN86] KANDEL, A.  
*Fuzzy Mathematical Techniques with Applications* Addison-Wesley Pub. Company - 1986.
- [KAU75] KAUFMANN, A.  
*Introduction to the Theory of Fuzzy Sets*. Vol. 1 - Academic Press, New York - 1975.
- [KAU77] KAUFMANN, A.  
Progress in Modeling of Human Reasoning by Fuzzy Logic.  
in *Fuzzy Automata And Decision Processes* Eds. M. M. Gupta; G. N. Saridis & B. R. Gaines North Holland - 1977.
- [KER91] KERN, Vinícius Medina  
*Uma Abordagem de Inteligência Artificial Para o Problema de Programação de Produção*  
Dissertação de Mestrado, Florianópolis UFSC/PPEGP - 1991
- [KIM88a] KIMBROUGH, Steven O. & LEE, Ronald M.  
Logic Modeling: A Tool for Management Science.  
*Decision Support Systems*, Vol. 4, No 1, pp. 3-16 - 1988.

- [KIM88b] KIMBROUGH, Steven O. & ADAMS, Fred  
Why Nonmonotonic Logic ?  
*Decision Support Systems*, Vol 4, pp. 111-127 - 1988.
- [KUI84] KUIPERS, B. J. & KASSIRER, J. P.  
Causal Reasoning in Medicine : Analysis of a Protocol.  
*Cognitive Science* 8, pp. 363-385 - 1984.
- [KUI88] KUIPERS, Benjamin; MOSKOWITZ, Alan J. & KASSIRER, J. P.  
Critical Decisions under Uncertainty : Representation and Structure.  
*Cognitive Science* 12, pp. 177-210 - 1988.
- [KYB87] KYBURG, H. E.  
Bayesian and Non-Bayesian Evidential Updating.  
*Artificial Intelligence*, Vol. 31, pp. 271-293 - 1987.
- [LEU88] LEUNG, K. S. & LAM, W.  
Fuzzy Concepts in Expert Systems.  
*Computer*, pp. 43-56, September - 1988.
- [LEU89] LEUNG, K. S. & LAM, W.  
A Fuzzy Expert System Shell Using Both Exact and Inexact Reasoning.  
*Journal of Automated Reasoning* 5, pp. 207-233 - 1989.
- [LUN91] LUNA, Paulo de Tarso Mendes  
*Sistemas de Apoio à Decisão : Uma Aplicação na Administração do Capital de Giro sob Inflação.*  
Dissertação de Mestrado, Florianópolis UFSC/PPEGP - 1991
- [MAY91] MAYERLE, Sérgio & PACHECO, Roberto C. S.  
*O Processo de Inferência na Lógica Difusa Considerando Importâncias Relativas Entre as Premissas.*  
Relatório Técnico - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina - PPGE/UFSC - 1991.
- [MIZ79] MIZUMOTO, M.; FUKAMI, S. & TANAKA, K.  
Some Methods of Fuzzy Reasoning.  
in *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*  
Eds. M. M. Gupta, R. K. Ragade and R. R. Yager  
North Holland - 1979.
- [MIZ85] MIZUMOTO, M.  
Extended Fuzzy Reasoning  
in *Approximate Reasoning in Expert Systems*  
Eds. M. M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler and J. B. Kiskza  
North Holland, pp. 71-85 - 1985.
- [MOC88] MOCETTI, Jean-Pierre  
*Assistance A L'Opérateur : Une Approche de L'Intelligence Artificielle*  
Teknea - Octobre - 1988.

- [MON91] MONTENEGRO, Fernando Borges  
*Uma Interface em Linguagem Natural para um Sistema Especialista de Administração de Capital de Giro.*  
Dissertação de Mestrado, Florianópolis UFSC/PPEGP - 1991
- [MYE88] MYERS, Stewart C.  
Notes on an Expert System for Capital Budgeting  
*Financial Management*, pp. 23-31, Autumn - 1988.
- [NAT83] NATVIG, B.  
Possibility Versus Probability.  
*Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 10, pp. 31-36 - 1983.
- [NEG85] NEGOITA, C. V. & RALESCU, D.  
*Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*  
Ed. Birkhauser, Basel - 1975.
- [NEG85] NEGOITA, Constantin Virgil  
*Expert Systems and Fuzzy Systems.*  
Benjamin / Cummings Publishing Company - 1985.
- [NOR84] Norwich, A. M. & Turksen, I. B.  
A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of its Empirical Implementation  
*Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 12, pp. 1-25 - 1984.
- [NUT87] NUTTER, J. T.  
Reasoning, Default.  
*Encyclopedia of Artificial Intelligence*  
John Wiley & Sons - New York - 1987.
- [PAR86] PARRELLO, Bruce D. & KABAT, Waldo C.  
Job-Shop Scheduling Using Automated Reasoning: A Case Study of the Car-Sequencing Problem  
*Journal of Automated Reasoning* 2, pp. 1-42, 1986
- [PAU86] PAU, L. F.  
Artificial Intelligence in Economics and Management: Why ?  
*Artificial Intelligence in Economics and Management* -  
Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland),  
pp. v-xv - 1986.
- [PEA82] PEARL, Judea  
Reverend Bayes on Inference Engines : A Distributed Hierarchical Approach.  
*Proceedings of the Second National Conference on Artificial Intelligence*, Pittsburgh, PA, pp. 133-136 1982.

- [PEA85] PEARL, Judea  
How To Do With Probabilities What People Say You Can't.  
*The Second Conference on Artificial Intelligence Applications - The Engineering of Knowledge-Based Systems - Session 1A : Reasoning with Uncertainty.*  
IEEE Computer Society - Computer Society Press,  
pp. 6-12, December - 1985.
- [PEA86a] PEARL, Judea  
A Constraint - Propagation Approach To Probabilistic Reasoning  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 357-369, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [PEA86b] PEARL, Judea  
Probabilistic Reasoning Using Graphs  
in *Uncertainty in Knowledge-Based Systems*  
Eds. B. Bouchon and R. R. Yagerr  
Springer-Verlag - 1986.
- [PEA87] PEARL, Judea  
Bayesian Decision Methods.  
*Encyclopedia of Artificial Intelligence*  
John Wiley & Sons Pub. - New York, pp. 48-56 - 1987.
- [PED81] PEDNAULT, E.P.D.; ZUCKER, S. W. & MURESAN, L. V.  
On the Independence Assumption Underlying Subjective Bayesian Updating.  
*Artificial Intelligence*, Vol. 16, pp. 213-222 - 1981.
- [PIR84] PIRSIG, Robert M.  
*ZEN e a Arte da Manutenção de Motocicletas: uma investigação sobre valores*  
Editora Paz e Terra, Rio de Janeiro - 1984.
- [PRA81] PRADE, H.  
Modal Semantics and Fuzzy Set Theory  
In *Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developmemnt*  
Ed. Yager, R. R. - pp. 232-246 - Pergamon Press - 1981.
- [PRA82] PRADE, H.  
Lipski's Approach to Incomplete Information Database Restated in the Setting of Zadeh's Possibility Theory  
*Information Systems* - 1982.
- [PRA83] PRADE, H.  
A Synthetic View of Approximate Reasoning Techniques  
IJCAI 83 - *Proceedings of The Eight International Joint Conference on Artificial Intelligence*  
Vol. 1, pp. 130-136 - 1983.

- [PRA85] PRADE, H.  
A Computational Approach to Approximate and Plausible Reasoning with Applications to Expert Systems  
*IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* Vol. PAM1-7, pp. 260-283 (also corrections pp 747-748) - 1985.
- [RAG77] RAGADE, Rammohan K, & GUPTA, Madan M.  
Fuzzy Set Theory : Introduction.  
*Fuzzy Automata and Decision Processes*  
ed. M Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines  
North Holland - New York - 1977.
- [RIX86] RIXHON, Philippe  
Intelligent Knowledge-Based Systems: A Tool for Manufacturing Planning & Scheduling  
*Artificial Intelligence in Economics and Management* - Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland), pp. 283-289 - 1986.
- [ROD90] RODRIGUES Filho, Ilson Wilmar  
*Inteligência Artificial Aplicada na Engenharia Rodoviária.*  
Dissertação de Mestrado, Florianópolis UFSC/PPEGP - 1990
- [SCH80] SCHEFE, P.  
On Foundations of Reasoning with Uncertainty Facts and Vagues Concepts  
*Int. J. Man Machine Studies*, Vol. 12, pp. 35-62 - 1980.
- [SCHI87] SCHILDT, Herbert  
*Advanced Turbo Prolog.*  
Mcgraw-Hill Inc., U.S.A. - 1987.
- [SEC90] SECAGI - Sistema Especialista para Administração do Capital de Giro Empresarial  
*Relatórios de Atividades do Sistema SECAGI.*  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina - 1990.
- [SHA76] SHAFER, Glenn  
*A Mathematical Theory of Evidence*  
Princeton University Press, Princeton, NJ - 1976.
- [SHA85a] SHAFER, Glenn & Tversky, A.  
Languages and Designs for Probability Judgements.  
*Cognitive Science* 9, pp. 309-339 - 1985.
- [SHA85b] SHAFER, Glenn  
Hierarchical Evidence  
*The Second Conference on Artificial Intelligence Applications - The Engineering of Knowledge-Based Systems - Session 1A: Reasoning with Uncertainty*  
IEEE Computer Society - Computer Society Press, pp. 16-21, December - 1985.

- [SHA86] SHAFER, Glenn  
Probability Judgement in Artificial Intelligence.  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 127-135, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [SHA87a] SHAFER, Glenn & LOGAN, Roger  
Implementing Dempster's Rule for Hierarchical Evidence.  
*Artificial Intelligence*, Vol. 33, pp. 271-298 - 1987.
- [SHA87b] SHAFER, Glenn  
Probability Judgement in Artificial Intelligence and  
Expert Systems.  
*Statistical Science*, Vol. 2, No. 1, pp. 3-44 - 1987.
- [SHA90] SHAFER, Glenn & PEARL, Judea  
*Readings In Uncertainty Reasoning*  
Edited by Glenn Shafer & Judea Pearl - Morgan Kaufmann  
Publishers, Inc. - United States - 1990.
- [SIL89] SILVA, Wagner Teixeira da & MILIDIÚ, Ruy Luiz  
Combinando Crenças Politémicas Sobre Uma Partição Comum  
*Anais do 6<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro em Inteligência Artificial*  
Soc. Bras. Computação - PUC/RJ - 6 a 9 Novembro de 1989.
- [SME81] SMETS, Philippe  
The Degree of Belief in a Fuzzy Event  
*Information Sciences*, Vol. 25, pp. 1-19 - 1981.
- [SOM90] SOMÉ, LÉA  
*Reasoning Under Incomplete Information in Artificial Intelligence*  
International Journal of Intelligent Systems, Vol. 5,  
Number 4, September - Ed. John Wiley & Sons - 1990.
- [SPI86] SPIEGELHALTER  
Probabilistic Reasoning in Predictive Expert Systems  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 47-67, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [STA77] STALLINGS, William  
Fuzzy Set Theory versus Bayesian Statistics.  
*IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*,  
Vol 7, pp. 216-219, March - 1977.
- [SUG77] SUGENO, M.  
Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals - A Survey.  
*Fuzzy Automata And Decision Processes*  
Eds. M. M. Gupta; G. N. Saridis & B. R. Gaines  
North Holland - 1977.



- [SZW84] SZWARCFITER, Jayme Luiz  
*Grafos e Algoritmos Computacionais*  
Editora Campus Ltda. - Rio de Janeiro - 1984.
- [THO85] THOMPSON, T. R.  
Parallel Formulation of Evidential-Reasoning Theories  
*Proc. 1985 Int. Joint Conf. Artificial Intelligence*,  
IJCAI85, pp. 321-327 - 1985.
- [THE88] THE Neto, Jessé Sotó Maior L.  
*Um Sistema de Treinamento para Operadores de Reservatórios Baseado em Técnicas de Inteligência Artificial.*  
Dissertação de Mestrado, Florianópolis UFSC/PPEGP - 1988
- [TOD91] TODESCO, José Leomar  
*Um Sistema Especialista para Auxiliar na Elaboração de Recomendações para o Controle da Sarna da Macieira.*  
Dissertação de Mestrado, Florianópolis UFSC/PPEGP - 1991
- [TRI79] TRIBUS, M.  
Comment on Fuzzy Sets, Fuzzy Algebra and Fuzzy Statistics.  
*Proc. IEEE*, Vol. 67, 1168 - 1979.
- [TUR86] TURKSEN, I. B.  
Measurement of Membership Functions  
in : *Applications of Fuzzy Set Theory in Human Factors*  
edited by W. Karwowski and A. Mital  
Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam -  
Netherlands - 1986.
- [TURN84] TURNER, Raymond  
*Logics For Artificial Intelligence*  
Ellis Horwood Limited Pub. - John Wiley & Sons - Great Britain - 1984.
- [VEN85] VENKATASUBRAMANIAN, V.  
Inexact Reasoning in Expert Systems: A Stochastic Parallel Network Approach  
*The Second Conference on Artificial Intelligence Applications - The Engineering of Knowledge-Based Systems - Session 1A: Reasoning with Uncertainty*  
IEEE Computer Society - Computer Society Press,  
pp. 13-15, December - 1985.
- [WAT78] WATERMAN, D. A. & HAYES-ROTH, F.  
A Overview of Pattern-Directed Inference Systems.  
*Pattern-directed inference systems*  
Eds. D. A. Waterman and F. Hayes-Roth - Academic Press -  
New York - 1978
- [WEN80] WENSTOP, F.  
Quantitative Analysis with Linguistic Values  
*Fuzzy Sets and Systems* 4, pp. 99-115 - 1980.

- [YEN90] YEN, John  
Generalizing the Dempster-Shafer Theory to Fuzzy Sets  
*IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*,  
pp. 559-570, Vol. 20, No. 3, May/June - 1990.
- [ZAD65] ZADEH, L. A.  
Fuzzy Sets.  
*Information And Control* 8, pp. 338-353 - 1965.
- [ZAD75] ZADEH, L. A.  
Fuzzy Logic and Approximate Reasoning (in memory of  
Grigor Moisil).  
*Synthese*, Vol 30, pp. 407-428 - 1975.
- [ZAD78] ZADEH, L. A.  
Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility.  
*Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 3-28 - 1978.
- [ZAD81] ZADEH, L. A.  
PRUF - a Meaning Representation Language for Natural  
Languages.  
in *Fuzzy Reasoning and its Applications*.  
Eds. Mamdani e Gaines, Academic Press - 1981.
- [ZAD83a] ZADEH, L. A.  
A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural  
Languages.  
*Comp. & Maths. with Appls.*  
Vol. 9, No. 1, pp. 149-184, 1983.
- [ZAD83b] ZADEH, L. A.  
The Role of Fuzzy Logic in the Management of Uncertainty  
in Expert Systems.  
*Fuzzy Sets and Systems* 11, pp. 199-227 - 1983.
- [ZAD85] ZADEH, L. A.  
*Approximate Reasoning in Expert Systems*.  
Eds. M. M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler and J. B. Kiskza  
North Holland - 1985.
- [ZAD86] ZADEH, L. A.  
Is Probability Theory Sufficient for Dealing with  
Uncertainty in AI : A Negative View.  
in *Uncertainty in Artificial Intelligence*  
pp. 103-116, Eds. L. N. Kanal and J. F. Lemmer  
North Holland - 1986.
- [ZEM84] ZEMANKOVA-LEECH, M. & KANDEL, A.  
*Fuzzy Relational Data Bases - A Key to Expert Systems*  
Verlag TUV Rheinland - 1984.  
Also Revised in *Fuzzy Mathematical Techniques with  
Applications* by Kandel, A.  
pp. 211-224 - Addison-Wesley Pub. Company - 1986.

- 
- [ZIM85] ZIMMERMANN, H. J.  
*Fuzzy Set Theory and its Applications.*  
Boston : Kluwer 1985.

## APÊNDICE I : ABREVIACÕES

Neste trabalho, foram utilizadas as seguintes notações e respectivos significados :

*e.g.* : *exempli gratia* (por exemplo)

*etc.* : *et cetera* (e outros)

*i.e.* : *id est* (isto é)

## APÊNDICE II : REFERÊNCIAS CITADAS EM [HIN87]

Neste apêndice estão as referências citadas no capítulo III (seção 3.6), presentes no trabalho de Hink e Wood [HIN87] e que não foram reanalisadas neste trabalho. Assim os estudos da referida seção do capítulo III baseiam-se na análise dos autores supracitados em relação aos trabalhos listados a seguir.

[BAR80] BAR-HILLEL, M.

The Base-Rate Fallacy in Probability Judgement.  
*Acta Psychologica* 44, pp. 211-233 - 1980.

[BET71] BETAQUE, N. E. & Gorry, A.

Automating Judgmental Decision Making for a Serious Medical Problem.  
*Management Science* B17, pp. 421-434 - 1971.

[COH58a] COHEN, J.; Dearnaley, E. J. & Hansel, C.

The Mutual Effect of Two Uncertainties  
*Durham Research Review* 2, pp. 215-222 - 1958.

[COH58a] COHEN, J. & Hansel, C.

The Nature of Decision in Gambling  
*Acta Psychologica* 20, pp. 157-162 - 1958.

[EDW64] EDWARDS, W. & Phillips, L. D.

Man as Traducer for Probabilities in Bayesian Command and Control Systems.  
In *Human Judgement and Optimality*, pp. 360-401  
eds. M. W. Shelly, II, and G. L. Bryan.  
New York : Wiley - 1964.

[FIS82] FISCHHOFF, B.

Debiasing  
In *Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases*  
eds. D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky - New York :  
Cambridge University Press, pp. 422-444 - 1982.

[FIS83] FISCHHOFF, B. & BETHY-MAROM, R.

Hypothesis Evaluation from a Bayesian Perspective.  
*Psychological Review* 90, pp. 239-260 - 1983.

[HOW72] HOWELL, W. C.

Compounding Uncertainty from Internal Sources.  
*Journal of Experimental Psychology*, 95, pp. 6-13 - 1972.

[KAH72a] KAHNEMAN, D. & TVERSKY, A.

On Prediction and Judgement.  
*ORI Research Monograph* 12 - 1972.

[KAH72b] KAHNEMAN, D. & TVERSKY, A.

Subjective Probability : A Judgement of Representativeness.  
*Cognitive Psychology*, 3, pp. 430-454 - 1972.

- [KAH73] KAHNEMAN, D. & TVERSKY, A.  
On The Psychology of Prediction.  
*Psychological Review* 80, pp. 237-251 - 1973.
- [KAH82] KAHNEMAN, D. & TVERSKY, A.  
On the Study of Statistical Intuitions  
*Cognition* 11, pp. 123-141 - 1982.
- [LIC77] LICHTENSTEIN, S. & FISHOFF, B.  
Do Those Who Know More Also Know More About How Much  
They Know?  
*Organizational Behavior and Human Performance*  
Vol. 20, pp. 159-183 - 1977.
- [LIC82] LICHTENSTEIN, S.; FISHOFF, B. & PHILLIPS, L. D.  
Calibration of Probabilities: The State of The Art to  
1980.  
In *Judgement under Uncertainty : Heuristics and Biases*  
eds. D. Kahneman, P. Slovic, and A. Tversky - New York :  
Cambridge University Press, pp. 306-334 - 1982.
- [PHI66] PHILLIPS, L. D. & EDWARDS, W.  
Conservatism in a Simple Probability Inference Task.  
*Journal of Experimental Psychology*, Vol 72, pp. 346-354  
1966.
- [SPE75] SPETZLER, C. S. & STEAL VON HOLSTEIN, C.  
Probability Encoding in Decision Analysis  
*Management Science*, 22, pp. 340-358 - 1975.
- [TVE71] TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D.  
Belief in the Law of Small Numbers.  
*Psychology Bulletin*, 76, pp. 105-110 - 1971.
- [TVE73] TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D.  
Availability : A Heuristic for Judging Frequency and  
Probability  
*Cognitive Psychology*, 5, pp. 207-232 - 1973.
- [TVE74] TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D.  
Judgement Under Uncertainty : Heuristics and Biases  
*Science*, 185, pp. 1124-1131 - 1974.
- [TVE80] TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D.  
Causal Schemas in Judgement under Uncertainty  
In *Progress in Social Psychology*,  
eds. M. Fishbein, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum  
Vol. I, pp. 49-72 - 1980.
- [TVE83] TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D.  
Extensional versus Intuitive Reasoning: The Conjunction  
Fallacy in Probability Judgement.  
*Psychological Review* 4, pp. 293-315 - 1983.

[ZAK83] ZAKAY, D.

The Relationship Between the Probability Assessor and the Outcome of an Event as a Determiner of Subjective Probability.

*Acta Psychologica* Vol. 53, pp. 271-280 - 1983.